This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Sammlung Schubert XXXVI

Mehrdimensionale Geometrie

II. Teil

Die Polytope

von

Prof. Dr. P. H. Schoute

G. J. Göschensche Verlagshandlung, Leipzig

Sammlung Schubert

Sammlung mathematischer Lehrbücher.

Verzeichnis der erschienenen und projektierten Bände.

595.9
11

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM THE BEQUEST OF

HORACE APPLETON HAVEN,

OF PORTSMOUTH, N. H.

(Class of 1843.)

1905:

Algebra von Professor
mburg. M. 2.80.
Prof. W. Pflieger in

igonometrie von Dr.
2.—.
on Dr. F. Bohnert in

**Kombinatorik, Wahr-
ettenbrüche und dio-**
on Prof. Dr. Hermann
.60.
elementaren Zahlen-
in Altona. M. 4.40.
on Prof. Dr. Rud. Böger

bene von Prof. Dr. Max

I. Teil: Gerade, Ebene,
n in Straßburg. M. 4.—.
of. Dr. W. Franz Meyer

Dr. W. Franz Meyer in

eil: Elemente der dar-
Dr. John Schröder in

Prof. Dr. L. Schlesinger
. 8.—.
Prof. Dr. C. Runge in

usgleichungsrechnung
en. M. 8.—.
on Dr. W. Großmann in

Raumes II. Teil: Die
on Prof. Dr. Max Simon

**I. Teil: Die projektiven
ren Anwendungen** von
Prof. Dr. Karl Doehlemann in München. M. 10.—.

„ XXIX: **Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen I. Teil** von Prof. Dr. Victor Kommerell in Reutlingen und Prof. Dr. Karl Kommerell in Heilbronn. M. 4.80.

Band XXXI: **Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale** von Oberlehrer E. Landfriedt in Straßburg. Mk. 8.50.

„ XXXII: **Theorie und Praxis der Reihen** von Professor Dr. C. Runge in Hannover. M. 7.—.

„ XXXIV: **Liniengeometrie mit Anwendungen I. Teil** von Prof. Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. M. 12.—.

„ XXXV: **Mehrdimensionale Geometrie I. Teil: Die linearen Räume** von Prof. Dr. P. H. Schoute in Groningen. M. 10.—.

„ XXXVIII: **Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung** I. Teil von Prof. E. Grimsehl in Hamburg M. 6.—.

„ XXXIX: **Thermodynamik I. Teil** von Prof. Dr. W. Voigt in Göttingen. M. 10.—.

„ XL: **Mathematische Optik** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 6.—.

„ XLI: **Theorie der Elektrizität und des Magnetismus I. Teil: Elektrostatik und Elektrokinetik** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 5.—.

„ XLII: **Theorie der Elektrizität und des Magnetismus II. Tl.: Magnetismus u. Elektromagnetismus** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 7.—.

„ XLIV: **Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen II. Teil** von Prof. Dr. Victor Kommerell in Reutlingen und Professor Dr. Karl Kommerell in Heilbronn. M. 5.80.

„ XLV: **Niedere Analysis II. Teil: Funktionen, Potenzreihen, Gleichungen** von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. M. 3.80.

„ XLVI: **Thetafunktionen u. hyperelliptische Funktionen** von Oberlehrer E. Landfriedt in Straßburg. M. 4.50.

„ XLVIII: **Thermodynamik II. Teil** von Prof. Dr. W. Voigt in Göttingen. M. 10.—.

„ XLIX: **Nichteuklidische Geometrie** von Prof. Dr. Heinr. Liebmann in Leipzig. M. 6.50.

In Vorbereitung bezw. projektiert sind:

Elemente der Astronomie von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.
Mathematische Geographie von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.
Darstellende Geometrie II. Teil: Anwendungen der darstellenden Geometrie von Prof. Erich Geyger in Kassel.
Geschichte der Mathematik von Prof. Dr. A. v. Braunmühl und Prof. Dr. S. Günther in München.
Dynamik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.
Technische Mechanik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.
Geodäsie von Prof. Dr. A. Galle in Potsdam.
Allgemeine Funktionentheorie von Dr. Paul Epstein in Straßburg.
Räumliche projektive Geometrie.

Geometrische Transformationen II. Teil von Prof. Dr. Karl Doehlemann in München.
Theorie der höheren algebraischen Kurven von Dr. Heinr. Wieleitner in Speyer.
Elliptische Funktionen von Dr. Karl Boehm in Heidelberg.
Allgemeine Formen- und Invariantentheorie von Prof. Dr. Jos. Wellstein in Gießen.
Mehrdimensionale Geometrie II. Teil von Prof. Dr. P. H. Schoute in Groningen.
Liniengeometrie II. Teil von Prof. Dr. Konrad Zindler in Innsbruck.
Kinematik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.
Elektromagnetische Lichttheorie von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg.
Gruppen- u. Substitutionentheorie v. Prof. Dr. E. Netto in Gießen.
Theorie der Flächen dritter Ordnung.
Mathematische Potentialtheorie v. Prof. Dr. A. Wangerin in Halle.
Elastizitäts- und Festigkeitslehre im Bauwesen von Dr. ing. H. Reißner in Berlin.
Elastizitäts- und Festigkeitslehre im Maschinenbau von Dr. Rudolf Wagner in Stettin.
Graphisches Rechnen von Prof. Aug. Adler in Prag.
Höhere Differentialgleichungen von Prof. J. Horn in Clausthal.
Photographische Optik von Dr. A. Gleichen in Berlin.
Grundlagen der theoretischen Chemie von Dr. Franz Wenzel in Wien.

Elemente der Stereometrie

von

Prof. Dr. Gustav Holzmüller.

Band I: **Die Lehrsätze und Konstruktionen.** Mit 282 Figuren. Preis brosch. M. 6.—, geb. M. 6.60.
„ II: **Die Berechnung einfach gestalteter Körper.** Mit 156 Figuren. Preis brosch. M. 10.—, geb. M. 10.80.
„ III: **Die Untersuchung und Konstruktion schwierigerer Raumgebilde.** Mit 126 Figuren. Preis brosch. M. 9.—, geb. M. 9.80.
„ IV: **Fortsetzung der schwierigeren Untersuchungen.** Mit 89 Figuren. Preis brosch. M. 9.—, geb. M. 9.80.

Dieses Werk dürfte wohl einzig in seiner Art dastehen, denn in so umfassender und gründlicher Weise ist die Stereometrie noch nicht behandelt worden. Das Wort „elementar" ist dabei so zu nehmen, daß die höhere Analysis und im allgemeinen auch die analytische Raumgeometrie ausgeschlossen bleiben, während die synthetische neuere Geometrie in den Kreis der Betrachtungen hineingezogen wird, soweit es die Methoden der darstellenden Geometrie erfordern.

Alle Figuren, auf die ganz besondere Sorgfalt verwendet worden ist, sind streng konstruiert und fast jede ist ein Beispiel der darstellenden Geometrie.

Trotz des elementaren Charakters geht diese neue Stereometrie weit über das übliche Ziel hinaus, gibt neben den Lehrsätzen umfangreiches Übungsmaterial, betont die Konstruktion und die Berechnung gleichmäßig und wird **an Vielseitigkeit und Gediegenheit des Inhalts wohl von keinem der hervorragenderen Lehrbücher erreicht.**

Sammlung Schubert XXXVI

Mehrdimensionale Geometrie

von

Dr. P. H. Schoute
Professor der Mathematik an der Reichs-Universität
zu Groningen (Holland)

Zweiter Teil

Die Polytope

Mit 90 Figuren und 123 Aufgaben

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1905

5959.02
Math 5039.02.3
II

Haven Fund
XXXVI

Alle Rechte vorbehalten.

Spamersche Buchdruckerei, Leipzig.

Vorwort.

Dieser zweite — und letzte — Teil meiner „Mehrdimensionalen Geometrie“ ist dem Studium der mehrdimensionalen Polytope gewidmet; dem elementaren Charakter der Lehrbücher der „Sammlung Schubert“ entsprechend treten dabei die linearen Polytope ganz in den Vordergrund, und könnten deshalb nur die einfachsten Eigenschaften der mehrdimensionalen Verallgemeinerungen von Kugel, Kegel und Cylinder Behandlung finden.

Auch in diesem zweiten Teile bin ich euklidisch geblieben, habe aber bei der Bestimmung von Inhalt und Oberfläche die Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung in den Kreis der Betrachtungen aufgenommen.

Zur Ausgleichung der „Unebenheiten der Sprache“ ist das Manuskript wieder von Herrn Prof. Dr. H. de Vries aus Delft durchgesehen worden. Außerdem war Prof. Dr. K. Doehlemann aus München so freundlich zum nämlichen Zwecke die Korrekturbogen zu lesen. Beiden Herren zolle ich hierbei öffentlich meinen besten Dank.

Als das Manuskript fertig war, ergab sich, daß es bei Drucklegung mehr als 400 Seiten in Anspruch nehmen würde; weil dies der Schubertschen Sammlung nicht angemessen erschien, habe ich mir die Mühe gegeben es zu reduzieren. Dabei ist zunächst die Anzahl der Übungsaufgaben bis auf ein Drittel der ursprünglichen Zahl herabgesunken, sind aber leider auch stellenweise einige Text-

erläuterungen verloren gegangen. Es möge mir dies zur Entschuldigung gereichen, falls es sich unverhofft ergeben sollte, daß ich an der Einbildungskraft des Lesers zu hohe Anforderungen gestellt habe. Im übrigen werde ich — in der Hoffnung, daß auch dieser zweite Teil sich eines freundlichen Entgegenkommens erfreuen möge — dankbar alle Bemerkungen entgegennehmen, welche mir bei einer eventuellen zweiten Auflage meiner Arbeit nützlich sein können.

P. H. Schoute.

Inhaltsverzeichnis.

Teil II: Die Polytope.

Erster Abschnitt: Topologische Einleitung.

§ 1. **Grundbegriffe.**

	Seite
1. Das Simplex das einfachste Polytop	1
2. Die beim Simplex $S(n+1)$ auftretenden n-dimensionalen Gebilde	3
3. Die Teilung des Raumes R_n durch ein $S(n+1)$.	4
4. Das Simplex die einfachste Konfiguration . . .	8
5. Die „einseitig geschlossenen" Konfigurationen .	10
6. Schnitt des Simplex	11
7. Schein des Simplex	17
8. Polyedrale Konfigurationen	20
9. Vorbereitende Bemerkungen zum Probleme der Einteilung der Polyeder	21
10. Analoges für die Einteilungsfrage der Polytope .	28
11. Steigerung der Eckenzahl eines Simplexpolytopes. Dual entgegengesetztes Problem	33
12. Pyramiden und Prismen	34
13. Andere Polytope speziellen Charakters	40

§ 2. **Der Eulersche Satz.**

14. Der Eulersche Satz in unserm Raume	47
15. Beweise des Eulerschen Satzes	48
16. Gültigkeitsbereich des Eulerschen Satzes; verallgemeinerte Formulierungen	51
17. Folgerungen aus dem Eulerschen Satze . . .	54

Seite

18. Einteilung der Polyeder 57
19. Mutmaßliche Form des mehrdimensional erweiterten Eulerschen Satzes 60
20. Beweis des mehrdimensionalen Eulerschen Satzes 62
21. Folgerungen aus dem mehrdimensionalen Eulerschen Satze 64

Zweiter Abschnitt: Maßverhältnisse.

§ 3. Kongruenz und Ähnlichkeit.

22. Die Konstantenzahl des Simplex 66
23. Konstruktion und Kongruenz von Simplexen . . 67
24. Ähnlichkeit der Simplexe 72
25. Homologe Punkte und Geraden kongruenter und ähnlicher Simplexe 73
26. Die einfachsten merkwürdigen Punkte der Simplexe 76
27. Die Konstantenzahl der Polytope 78
28. Kongruenz und Ähnlichkeit der Polytope . . . 84
29. Die Diagonalen des Parallelotopes 85
30. Prismen und Pyramiden 93

§ 4. Inhaltsbetrachtungen.

31. Die Kiste 94
32. Der Projektionssatz 96
33. Das Parallelotop. Der Schäflische Projektionssatz 97
34. Das Prisma 107
35. Die einfache Pyramide 109
36. Das Simplex 113
37. Koordinaten- und Kantenausdruck des Simplexinhalts 119
38. Endlichgleichheit zweier negativ kongruenter Simplexe 123
39. Die mehrfache Pyramide 124
40. Der Prismenstumpf 124
41. Der Pyramidenstumpf 127
42. Das Simplotop 128
43. Das Prismoid 129
44. Nachträgliche Prismoidbetrachtungen 134

Seite

Dritter Abschnitt: Regelmäßige Polytope.

§ 5. **Reguläre Polygone.**

45. Allgemeine Bemerkungen 136
46. Diagonalen. Sternpolygone 138
47. Berechnung von Seiten und Diagonalen 140
48. Reguläre Vielecke und Gruppentheorie 142
49. Symmetrieachsen der regulären Vielecke. Das Zweiflach 145
50. Halbreguläre Polygone 148
51. Die ebenen Netze 150

§ 6. **Reguläre Polyeder.**

52. Allgemeine Bemerkungen 151
53. Die Existenzbeweise für die regulären Polyeder . 153
54. Projektionen und Schnitte der regulären Polyeder 160
55. Diagonalen und Winkelbeziehungen zwischen Hauptstrahlen bei den regulären Polyedern . 168
56. Koordinaten der Eckpunkte von Dodekaeder und Ikosaeder in anderer Stellung 171
57. Die Sternpolyeder 173
58. Die Schäflische Ableitung der Artzahlen . . . 178
59. Die regulären Polyeder und die Gruppentheorie . 180
60. Symmetrieebenen der regulären Polyeder. Der Zweiraum 185
61. Halbreguläre Polyeder 187
62. Die Kristallformen des regulären Systems. Hemiedrie. Kristallkombinationen 190
63. Die räumlichen Netze 195

§ 7. **Reguläre Zelle.**

64. Die überhaupt möglichen regulären Zelle . . . 196
65. Teilung der regulären Zelle in zwei Gruppen . 200
66. Die kennzeichnenden Zahlen der vier einfacheren Zelle 201
67. Die Koordinaten der Eckpunkte der Zelle Z_5, Z_8, Z_{16}, Z_{24} 204
68. Die Schlegelschen Diagramme der Zelle Z_5, Z_8, Z_{16}, Z_{24} 206
69. Die kennzeichnenden Zahlen der zwei komplizierteren Zelle 209

Seite

70. Die verschiedenen Koordinatenstellungen der regulären Zelle 213
71. Das einfachste Koordinatensystem für Z_{600} und Z_{120} 218
72. Projektionen und Schnitte der regulären Zelle . 220
73. Zerlegung der regulären Zelle Z_{600} und Z_{120} in gleichmittelpunktige reguläre Zelle 230
74. Die Schlegelschen Diagramme von Z_{600} und Z_{120} 231
75. Winkelbeziehungen zwischen Hauptstrahlen . . 232
76. Die Sternpolytope $\overline{Z}_{600}$ und $\overline{Z}_{120}$ 235
77. Die regulären Zelle und die Gruppentheorie. Symmetrieräume. Erweiterte Gruppen . . . 236
78. Die Kristallformen des regulären Systems. Hemiedrie. Kristallkombinationen 238
79. Die vierdimensionalen Netze 241

§ 8. **Reguläre Polytope höherer Dimension.**

80. Die drei regulären Polytope im R_n 243
81. Allgemeine Eigenschaften. Hauptstrahlen. Um-, An- und Inradien. Maß- und Winkelverhältnisse 245
82. Die einfachsten Koordinatenstellungen 245
83. Projektionen und Schnitte der regulären Polytope 247
84. Bestimmung der regulären Polytope durch reguläre Projektionen 249
85. Die regulären Polytope und die Gruppentheorie. Symmetrieräume. Erweiterte Gruppen . . . 255
86. Die Kristallformen des regulären Systems. Hemiedrie. Kristallkombinationen 256
87. Die n-dimensionalen Netze 261

Vierter Abschnitt: Die runden Polytope.

§ 9. **Die Kugelräume.**

88. Allgemeines 263
89. Der Kugelraum in der analytischen Geometrie . 266
90. Der Kugelraum in der darstellenden Geometrie . 269
91. Verschiedene Bestimmungsweisen des Kugelraumes 277
92. Die Ähnlichkeitspunkte der Kugelräume . . . 279

Seite

93. Die Kugelräume K_n, welche $n+1$ willkürlich im R_n gegebene Kugelräume K_n berühren . 281
94. Die Kugelräume K_n, welche $n+1$ Räume R_{n-1} berühren 283
95. Inhalt und Oberfläche des Kugelraumes . . . 288
96. Der Inhalt des Kugelraumsegmentes und der Kugelraumschicht 290
97. Das sphärische Simplex 291

§ 10. **Die Kegel- und Cylinderräume.**

98. Allgemeines 292
99. Kegel- und Cylinderräume in der analytischen Geometrie 295
100. Quadratische Kegel- und Cylinderräume. Rotationsräume 296
101. Kegel- und Cylinderräume in der darstellenden Geometrie 299
102. Inhalt und Oberfläche von Cylinder- und Kegelräumen 301
103. Inhalt und Oberfläche von Cylinder- und Kegelraumstümpfen 303
104. Die Oberfläche des Kugelraumsegmentes und der Kugelraumschicht 305

§ 11. **Allgemeinere Rotationsräume.**

105. Plani- und stereometrische Einleitung 306
106. Die von linearen Räumen erzeugten Rotationsgebilde im R_n 307
107. Die Torusgruppe 310
108. Die Guldinschen Regeln 311
109. Gemischte Rotationsgebilde 314
110. Die nicht-linearen einander berührenden Systeme von Kugelräumen 316

Anhang: Gemischte Aufgaben 321

Zweiter Teil.

Die Polytope.

Erster Abschnitt.

Topologische Einleitung.

§ 1. Grundbegriffe.

1. Das Simplex das einfachste Polytop. Unter *Polytop* im Raume R_n versteht man irgend ein auf irgend eine Weise begrenztes Stück dieses Raumes. Wird dieser Teil von R_n von lauter linearen Räumen begrenzt, so heißt er ein *lineares* oder ein *flaches* Polytop; allein wir werden diese Prädikate womöglich — und also vorläufig, wo ausschließlich von linearen Polytopen die Rede sein soll, immer — unterdrücken.

Das *Simplex* $S(3)$ der Ebene wird von drei Punkten A_1, A_2, A_3 und den sie paarweise verbindenden Geraden gebildet; dabei denkt man sich diese Geraden nach beiden Seiten hin bis ins Unendliche verlängert. Beim *Dreiecke* $A_1A_2A_3$, welches den einfachsten von Geraden eingeschlossenen Teil der Ebene bildet, werden die drei begrenzenden Seiten hingegen als Segmente A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2 von Geraden betrachtet. Mit diesem Unterschiede hängt dann weiter zusammen, daß in jedem Eckpunkte des Simplex $S(3)$ zwei Paar Scheitelwinkel auftreten, während beim Dreiecke jedem Eckpunkte nur ein einfacher Winkel entspricht. Ebenso sind die sechs Geraden durch zwei und die vier Ebenen durch drei der Eckpunkte des Simplex $S(4)$ des Raumes unendliche, oder wie wir sagen wollen *ganze* lineare Gebilde, und treten an jeder der Kanten zwei Paar

Scheiteldieder, an jeder der Ecken vier Paar Scheiteltrieder auf, während beim einfachsten von Ebenen eingeschlossenen Körper, dem Vierflache, die Kanten Segmente von Geraden, die Seitenflächen dreieckige Ebenenstücke sind und an jeder Kante sich nur ein einfaches Dieder, an jeder Ecke sich nur ein einfaches Trieder vorfindet, usw.

Man findet leicht, wie sich die höheren Simplexe $S(5)$, $S(6)$, usw. zur Frage der Begrenzung von Raumstücken in R_4, R_5, usw. verhalten, indem man in der früher (I 5, 6) gegebenen Erzeugung dieser Räume[1]) die ganzen linearen Gebilde durch *segmentale* ersetzt. So entsteht, wenn A_1, A_2, A_3 drei nicht in einer Gerade liegende Punkte sind, das Dreieck $A_1A_2A_3$ als Ort der Punkte P des Segmentes A_3P' der Geraden, welche alle Punkte P' des Segmentes A_1A_2 mit A_3 verbinden; dabei werden dann die drei das Dreieck begrenzenden Seiten von A_1A_2 und den Verbindungssegmenten von A_3 mit den Endpunkten von A_1A_2 gebildet. So erhält man, wenn A_1, A_2, A_3, A_4 vier nicht in einer Ebene liegende Punkte sind, das Vierflach $A_1A_2A_3A_4$ als Ort der Punkte P des Segmentes A_4P' der Geraden, welche alle Punkte P' des Dreiecks $A_1A_2A_3$ mit A_4 verbinden; dabei werden die vier Grenzdreiecke des Vierflachs von $A_1A_2A_3$ und den Verbindungsdreiecken von A_4 mit den Seiten von $A_1A_2A_3$ gebildet. Und nun leuchtet unmittelbar ein, wie man regelmäßig fortschreitend zu dem mit einem $S(n+1)$ von R_n in Verbindung stehenden endlichen Stücke dieses Raumes emporsteigt, indem man schließlich das in Rede stehende Stück des Raumes R_n erzeugt als Ort der Punkte P des Segmentes $A_{n+1}P'$ der Geraden, welche A_{n+1} verbinden mit allen Punkten P' des vorher erzeugten von n Räumen R_{n-2} eingeschlossenen Teiles des Raumes R_{n-1}, welcher dem Simplex $S(n)$ mit den Eckpunkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ entspricht.

Die Behauptung „das Simplex ist das einfachste Polytop" muß nun so gedeutet werden, daß es unmöglich ist, einen Teil des Raumes R_n mittels einer Zahl von Räumen R_{n-1} niedriger als $n+1$ völlig einzuschließen. Wirklich ist n Räumen R_{n-1}, welche in bezug auf Parallelismus eine

[1]) Bei der Anführung der Nummern des ersten Teiles werden wir derselben immer eine I vorangehen lassen.

voneinander ganz unabhängige Lage haben, immer ein eigentlicher Punkt O gemein und wird irgend ein nicht in einem dieser n Räume R_{n-1} liegender Punkt P durch Verbindung mit O eine Gerade OP liefern, welche mit keinem der n Räume R_{n-1} einen von O verschiedenen Punkt P' gemein hat; deshalb kann weder von Ein- noch Ausschließen dieses Punktes P die Rede sein.

Schließlich sei bemerkt, daß früher, bei der Behandlung des vierdimensionalen Vierkants (I 130) und des n-dimensionalen n-Kants (I 133), schon ein Schritt getan wurde auf dem Wege der Ersetzung der „ganzen" linearen Gebilde durch „segmentale", indem wir bei diesen Figuren *Halbstrahlen* einführten. Wir fügen jetzt noch hinzu, daß man den vom Simplex $S(n+1)$ eingeschlossenen Teil des Raumes R_n auch mittels des n-dimensionalen n-Kants erhalten kann, indem man auf jedem der Halbstrahlen OX_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ einen Punkt A_i annimmt und das n-Kant durch den von den n Punkten A_i bestimmten Raum R_{n-1} abschließt.

Künftighin werden wir unter „Simplex" sowohl die Figur mit ihren ganzen linearen Räumen wie den von ihm eingeschlossenen endlichen Teil des Raumes verstehen. Aus dem bezüglichen Sinne muß dann jedesmal abgeleitet werden, welche der beiden Deutungen gemeint ist.

Aufgabe 1. Beweise, daß man zur Konstruktion eines $S(n+1)$ im R_n eine Anzahl von $2^{n+1} - n - 3$ Operationen braucht, wenn die $n+1$ Eckpunkte gegeben vorliegen und man das Verbinden zweier Punkte durch ein Geradensegment, das Verbinden dreier Dreiecksseiten durch ein dreieckiges Ebenenstück, usw. als eine Operation betrachtet.

2. Die beim Simplex $S(n+1)$ auftretenden n-dimensionalen Gebilde. Richtet man beim $S(n+1)$ seine Aufmerksamkeit zunächst ausschließlich auf die Elemente kleinster Dimensionenzahl, so findet man, daß durch jeden Eckpunkt n Kanten, durch jede Kante $n-1$ Seitenflächen, durch jede Seitenfläche $n-2$ Seitenräume gehen, usw. Die Figur der n Kanten durch den Eckpunkt A_1, jede dieser Kanten über den von A_1 verschiedenen Eckpunkt hinaus unbestimmt verlängert, ist das uns schon bekannte n-dimensionale n-Kant. Die Figur der $n-1$ Seitenflächen durch die beiderseitig unbestimmt verlängerte Kante $A_1A_2 = a_{1,2}$, jede dieser drei-

eckigen Seitenflächen zu einer das Dreieck enthaltenden von $a_{1,2}$ begrenzten Halbebene ausgebreitet, möge als „n-dimensionale $n-1$-Ebene" mit dem *Firste* $a_{1,2}$ bezeichnet werden. So fortfahrend möge die Figur der $n-2$ Seitenräume durch die nach allen Richtungen hin ausgebreitete Seitenfläche $A_1 A_2 A_3 = \alpha_{1,2,3}$, jeder dieser vierflächigen Seitenräume zu einem das Vierflach enthaltenden von $\alpha_{1,2,3}$ begrenzten Halbraume ergänzt, als „n-dimensionaler $n-2$-Raum" mit der *Decke* $\alpha_{1,2,3}$ angedeutet werden, usw.

Mittels Kombination werden nun aus den oben angegebenen Grundelementen der mit dem Simplex in Verbindung stehenden neuen Gebilde die Elemente höherer Dimensionenzahl aufgefunden. So unterscheidet man am n-dimensionalen n-Kant außer den n Halbstrahlen noch $(n)_2$ zu je zwei, $(n)_3$ zu je drei, usw. aus ihnen gebildete Winkel, Trieder, usw. So findet man bei der n-dimensionalen $n-1$-Ebene neben den $n-1$ Halbebenen im allgemeinen $(n-1)_p$ zu je p aus ihnen gebildete $p+1$-dimensionale p-Ebenen, usw.

Schneidet man die n-dimensionale $n-1$-Ebene mit dem Firste a mit dem in irgend einem Punkte O von a auf a senkrecht stehenden Raum R_{n-1}, so ist der Durchschnitt ein $n-1$-dimensionales $n-1$-Kant, dessen Winkel die von den Elementen der $n-1$-Ebene gebildeten Winkel messen. So sind die $(n-1)_2$ Kantenwinkel des $n-1$-Kants die Neigungswinkel der $(n-1)_2$ Ebenenpaare der $n-1$-Ebene, die $(n-1)_3$ Flächenwinkeltripel des $n-1$-Kants die Winkeltripel der $(n-1)_3$ Ebenendrillinge der $n-1$-Ebene, usw. Ebenso werden die beim n-dimensionalen $n-2$-Raum mit der Decke α auftretenden Winkel abgelesen am $n-2$-dimensionalen $n-2$-Kant, welches aus dieser Figur ausgeschnitten wird von dem in irgend einem Punkte O von α auf α senkrecht stehenden Raume R_{n-2}, usw.

Die Figur des vierdimensionalen Ebenentripels, welche an jeder der zehn Kanten des Fünfzells auftritt, ist von Veronese ein *Trieder zweiter Gattung* genannt worden; sie wird von irgend einem Raume in einem gewöhnlichen Trieder geschnitten.

3. Die Teilung des Raumes R_n durch ein $S(n+1)$. Die Ebene wird durch irgend eines ihrer Simplexe $S(3)$ in sieben Teile zerlegt, von welchen ein einziger, das eingeschlossene

Dreieck $A_1 A_2 A_3$, endlich ist. Die sechs unendlichen Teile sind von zweierlei Form, nämlich Ecken a_1, a_2, a_3 und abgestumpfte Ecken b_1, b_2, b_3. Von diesen entspricht jeder Ecke a_i eine im Unendlichen mit ihr zusammenhängende abgestumpfte Ecke b_i mit dem nämlichen Index; wirklich sind die uneigentlichen Punkte der Geraden, welche A_1 mit den Punkten P des Geradensegmentes $A_2 A_3$ verbinden, zu gleicher Zeit die uneigentlichen Punkte von a_1 und von b_1. So kommt man zu vier in gewissem Sinne geschlossenen Teilen $A_1 A_2 A_3$, $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, $a_3 + b_3$ oder $(A_1 A_2 A_3)$, $(A_1, A_2 A_3)$, $(A_2, A_1 A_3)$, $(A_3, A_1 A_2)$, von welchen jedoch nur der erste endlich ist.

Aufgabe 2. Wie unterscheiden sich dem Vorzeichen nach die in bezug auf das Simplex $S(3)$ als Koordinatensimplex genommenen normalen Abstandskoordinaten der Punkte der sieben Teile der Ebene voneinander? Und welche Übereinstimmung zeigen die *Verhältnisse* dieser Koordinaten bei zwei Punkten P_a, P_b von einander ergänzenden Teilen a_i, b_i?

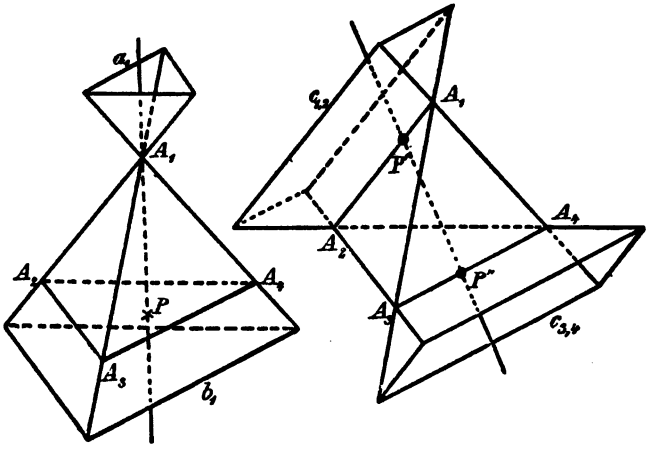


Fig. 1.

Der dreidimensionale Raum (Fig. 1) wird durch irgend eines seiner Simplexe $S(4)$ mit den Ecken A_1, A_2, A_3, A_4 in fünfzehn Teile zerlegt, von welchen wieder ein einziger, das

eingeschlossene Vierflach $A_1 A_2 A_3 A_4$, endlich ist. Und obgleich die vierzehn unendlichen Teile hier dreierlei Form annehmen, so ordnen sie sich dennoch in sieben Paare von in ihren uneigentlichen Punkten übereinstimmenden Raumteilen. Man findet nämlich Trieder wie a_1, abgestumpfte Trieder wie b_1, — von welchem $A_2 A_3 A_4$ wieder die Decke heißen mag —, und „dachförmige Räume“ oder Dächer wie $c_{1,2}$ — von welchem $A_1 A_2$ wieder der First genannt wird. Und offenbar gibt es vier Trieder, sechs Dächer und vier abgestumpfte Trieder, weil das S_4 vier Ecken, sechs Kanten und vier Seitenflächen hat. Mit Hilfe der Geraden $A_1 P$, welche A_1 mit den Punkten P des Dreiecks $A_2 A_3 A_4$ verbinden, ergibt sich, daß a_1 und b_1 in ihren uneigentlichen Punkten übereinstimmen, weshalb die Kombination $a_1 + b_1$ auch durch das Symbol $(A_1, A_2 A_3 A_4)$ gekennzeichnet werden kann. Und mit Hilfe der Geraden $P'P''$, welche einen Punkt P' des Segmentes $A_1 A_2$ mit einem Punkte P'' des Segmentes $A_3 A_4$ verbinden, findet man, daß diese Übereinstimmung auch bei den Dächern $c_{1,2}$ und $c_{3,4}$ auftritt, woraus einleuchtet, daß das Symbol $(A_1 A_2, A_3 A_4)$ die Kombination $c_{1,2} + c_{3,4}$ kennzeichnen kann. In dieser Weise erhält man also im ganzen acht geschlossene Raumteile mit den Symbolen

$$(A_1 A_2 A_3 A_4) \left| \begin{matrix} (A_1, A_2 A_3 A_4) \\ (A_2, A_1 A_3 A_4) \\ (A_3, A_1 A_2 A_4) \\ (A_4, A_1 A_2 A_3) \end{matrix} \right| \begin{matrix} (A_1 A_2, A_3 A_4) \\ (A_1 A_3, A_2 A_4) \\ (A_1 A_4, A_2 A_3) \end{matrix}$$

Achtet man bei der Teilung des R_n durch ein $S(n+1)$ zunächst nur auf die Zahl, so findet man außer dem eingeschlossenen Teile wieder unendliche Teile, welche sich nach der Art und Weise, wie sie mit diesem endlichen Teile zusammenhängen, unterscheiden in $(n+1)_1$ sich in den Ecken, $(n+1)_2$ sich längs der Kanten, $(n+1)_3$ sich an die Seitenflächen, usw., und schließlich $(n+1)_n$ oder $(n+1)_1$ sich an die Seitensimplexe $S(n)$ anlehnende Teile. Deshalb ist die Anzahl dieser Teile im ganzen

$$\begin{aligned} &1 + (n+1)_1 + (n+1)_2 + \ldots (n+1)_n \\ &= (1+1)^{n+1} - 1 = 2^{n+1} - 1 . \end{aligned}$$

Weiter ergibt sich, daß die $2(2^n - 1)$ unendlichen Teile wieder paarweise zusammengehören, indem die sich an zwei Gegenelemente des Simplex anlehnenden Teile in ihren uneigentlichen Punkten übereinstimmen. Und obgleich man dadurch für alle Werte von n zu $1 + (2^n - 1) = 2^n$ „geschlossenen Teilen" gelangt, so hat man doch in Hinsicht auf die Paarung der Teile die Fälle eines geraden und ungeraden n zu unterscheiden, indem im $S(n+1)$ bei geradem n

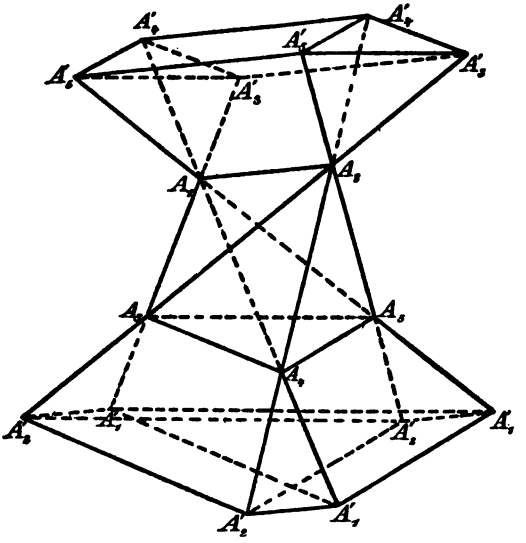


Fig. 2.

immer ungleichartige Elemente einander gegenüberliegen, bei ungeradem n jedoch die die Mitte haltenden gleichartigen Elemente paarweise Gegenelemente sind. Oder aber die Reihe

$$(A_1 A_2 A_3 \ldots A_{n+1}) + (n+1)_1 (A_1, A_2 A_3 \ldots A_{n+1}) + (n+1)_2 (A_1 A_2, A_3 \ldots A_{n+1}) + \ldots$$

der geschlossenen Teile schließt mit

$$(n+1)_{\frac{n}{2}} (A_1 A_2 \ldots A_{\frac{n}{2}}, A_{\frac{n+2}{2}} \ldots A_{n+1})$$

oder mit

$$\tfrac{1}{2}(n+1)_{\frac{n+1}{2}}\,(A_1 A_2 \ldots A_{\frac{n+1}{2}},\ A_{\frac{n+3}{2}} \ldots A_{n+1}),$$

je nachdem n gerade oder ungerade ist. Hat man doch, wenn man die binomische Entwicklung von $(1+1)^{n+1}$ in der Mitte abbricht, bei ungeradem n das mittlere Glied zu hälften.

Die Betrachtung der Form der verschiedenen unendlichen Teile wird wesentlich erleichtert durch eine Reihe einfacher, einigermaßen schematischer Abbildungen, in welchen die Verlängerung der Kante $A_i A_k$ über A_i hinaus allemal mit $A_i A_i'$ bezeichnet wird. Während das in einem Eckpunkte aufsitzende n-dimensionale n-Kant uns längst bekannt ist, erblickt man in Fig. 2 (Seite 7) für den Fall des S_5 im R_4 oben die längs $A_1 A_2$ sich anlehnende „zweifach abgestumpfte Dreiebene", und unten den „dreifach abgestumpften Zweiraum" mit der Decke $A_3 A_4 A_5$.

4. Das Simplex die einfachste Konfiguration. Abgesehen von den Größenverhältnissen der verschiedenen Teile der Begrenzung kann dem Simplex $S(n+1)$ insofern ein regelmäßiger Bau zugesprochen werden, als jede Gruppe von gleichnamigen Elementen aus in gewissem Sinne gleichwertigen Elementen besteht. Es sind alle Seitenflächen dreiseitig, alle Seitenräume vierflächig, alle vierdimensionalen Seitenräume fünfzellig, usw. Oder allgemeiner: für $n \geqq k \geqq l$ enthält jedes Element $S(k+1)$ eine Anzahl von $(k+1)_{l+1}$ Elementen $S(l+1)$ und ist jedes Element $S(l+1)$ in $(n-l)_{k-l}$ Elementen $S(k+1)$ enthalten.

Hat eine aus lauter linearen Elementen, nämlich aus A_0 Punkten, A_1 Geraden, A_2 Ebenen, ..., A_p Räumen R_p, ..., A_q Räumen R_q, ... gebildete Figur die merkwürdige Eigenschaft, daß im allgemeinen durch jeden der A_p Räume R_p eine bestimmte Anzahl $a_{q,p}$ von Räumen R_q geht und umgekehrt jeder der A_q Räume R_q eine bestimmte Anzahl $a_{p,q}$ von Räumen R_p enthält, so nennt man die Figur eine *Konfiguration* und symbolisiert sie durch die erste Tabelle, welche ohne weitere Erläuterung verständlich ist; also ist das Simplex $S(n+1)$ eine Konfiguration gekennzeichnet durch die zweite Tabelle.

	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	...
R_0	A_0	$a_{1,0}$	$a_{2,0}$	$a_{3,0}$	$a_{4,0}$	...
R_1	$a_{0,1}$	A_1	$a_{2,1}$	$a_{3,1}$	$a_{4,1}$	...
R_2	$a_{0,2}$	$a_{1,2}$	A_2	$a_{3,2}$	$a_{4,2}$	...
R_3	$a_{0,3}$	$a_{1,3}$	$a_{2,3}$	A_3	$a_{4,3}$	...
R_4	$a_{0,4}$	$a_{1,4}$	$a_{2,4}$	$a_{3,4}$	A_4	...
...	...	...	...	...	...	...

	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	...
R_0	$(n+1)_1$	$(n)_1$	$(n)_2$	$(n)_3$	$(n)_4$	...
R_1	2	$(n+1)_2$	$(n-1)_1$	$(n-1)_2$	$(n-1)_3$	...
R_2	3	3	$(n+1)_3$	$(n-2)_1$	$(n-2)_2$	...
R_3	4	6	4	$(n+1)_4$	$(n-3)_1$	...
R_4	5	10	10	5	$(n+1)_5$	...
...	...	...	...	...	...	...

Aufgabe 3. Beweise die allgemeine Beziehung $A_p a_{q,p} = A_q a_{p,q}$.

Wie man leicht bemerkt, zeigt das Simplex Merkmale der Polarität, indem einerseits die Zahlen A_p und A_{n-p-1} der Grenzräume R_p und R_{n-p-1}, andererseits die Zahlen $a_{q,p}$ und $a_{n-q-1,\,n-p-1}$ der Grenzräume R_q durch einen R_p und der Grenzräume R_{n-q-1} in einem R_{n-p-1} einander gleich sind. Wirklich hat sich (I 116) bei der Behandlung der Polarsysteme schon ergeben, daß man zur Bestimmung eines Polarsystems im R_n irgend ein $S(n+1)$ als Polsimplex annehmen und außerdem einem willkürlich gewählten Punkte P einen willkürlich gewählten Raum R_{n-1} zuordnen kann.

Aufgabe 4. Worin spricht sich die in Rede stehende Polarität bei den Zahlenquadraten der Simplexe aus?

Unter den Konfigurationen ist das Simplex $S(n+1)$ dadurch ausgezeichnet, daß einerseits jede Gerade durch zwei Punkte, jede Ebene durch drei Punkte, jeder Raum durch

vier Punkte, usw. und andererseits jeder R_{n-2} in zwei R_{n-1}, jeder R_{n-3} in drei R_{n-1}, jeder R_{n-4} in vier R_{n-1}, usw. der Konfiguration angehört. Daher kann das Simplex $S(n+1)$ eine „beiderseitig in sich geschlossene" Konfiguration genannt werden; weil es die einzige Konfiguration ist, welche diesen einfachen Charakter besitzt, mag es auch die *einfachste* Konfiguration heißen.

5. Die „einseitig geschlossenen" Konfigurationen. In der Ebene bilden das vollständige Viereck mit seinen vier Punkten P_i und ihren sechs Verbindungsgeraden, und das vollständige Vierseit mit seinen vier Geraden p_i und ihren sechs Schnittpunkten die einfachsten Beispiele einseitig geschlossener Konfigurationen; ihnen entsprechen die quadratischen Symbole $\left|\begin{matrix}4,3\\2,6\end{matrix}\right|$ und $\left|\begin{matrix}6,2\\3,4\end{matrix}\right|$. Die erste Figur ist an der Punktseite geschlossen und an der Geradenseite offen, oder wie wir sagen wollen „unten geschlossen und oben offen", weil die vier Ecken P_i nur die sechs Verbindungsgeraden liefern, diese Geraden sich aber außer in den vier Ecken P_i noch in drei *Nebenecken* Q schneiden. Und umgekehrt ist die zweite Figur „oben geschlossen und unten offen", indem die vier Seiten nur zu den sechs Schnittpunkten führen, die Verbindung dieser Punkte aber außer den vier Seiten p_i noch drei *Diagonalen* q liefert. Und im allgemeinen führen das vollständige ebene m-Eck und das vollständige ebene m-Seit zu zwei Konfigurationen $\left|\begin{matrix}m, m-1\\2,\ (m)_2\end{matrix}\right|$ und $\left|\begin{matrix}(m)_2\ , 2\\m-1,\ m\end{matrix}\right|$, von welchen die erstere unten geschlossen und oben offen, die letztere oben geschlossen und unten offen ist.

Aufgabe 5. Berechne die Zahl der Nebenecken des vollständigen ebenen m-Ecks und die Zahl der Diagonalen des vollständigen ebenen m-Seits.

[Man findet für beide Zahlen $3(m)_4$].

Im dreidimensionalen Raume bilden das von m willkürlich angenommenen Punkten bestimmte vollständige m-Eck und das von m willkürlich angenommenen Ebenen bestimmte vollständige m-Flach zwei einseitig geschlossene Konfigurationen mit den charakteristischen Zahlenquadraten

$$\begin{vmatrix} m & m-1 & (m-1)_2 \\ 2 & (m)_2 & m-2 \\ 3 & 3 & (m)_3 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} (m)_3 & 3 & 3 \\ m-2 & (m)_2 & 2 \\ (m-1)_2 & m-1 & m \end{vmatrix};$$

die erste dieser Konfigurationen ist wieder unten geschlossen und oben offen, die zweite oben geschlossen und unten offen. So fortfahrend erhält man im R_n zwei analoge Gebilde, deren Zahlenquadrate leicht gefunden werden.

Die einseitig geschlossenen Konfigurationen führen allgemein zu neuen Gruppen von Elementen, welche beim vollständigen m-Eck *Nebenelemente*, beim dual entgegengesetzten vollständigen m-R_{n-1} *Diagonalelemente* heißen mögen. Beschränken wir uns auf das erste Gebilde, so muß sofort bemerkt werden, daß naturgemäß in der Ebene nur Nebenecken, im Raume nur Nebenecken und Nebenkanten, usw. und im R_n nur Nebenelemente mit höchstens $n-2$ Dimensionen auftreten.

Aufgabe 6. Berechne die Zahl der Nebenecken des m-Ecks im R_n.

6. Schnitt des Simplex. Schneidet man das Simplex $S(4)$ des Raumes durch eine Ebene, so erhält man (Fig. 3)

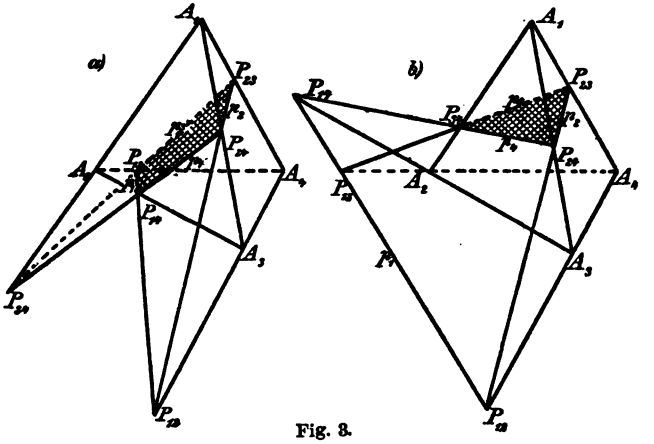


Fig. 3.

wesentlich verschiedene Resultate, je nachdem man die Ebenen von $S(4)$ als unendlich ausgebreitet oder als endliche

Dreiecke betrachtet. Im ersten Falle findet man im allgemeinen vier Gerade p_i und ihre sechs Schnittpunkte $P_{i,k}$, d. h. ein vollständiges Vierseit mit seinen sechs Ecken; im zweiten Falle ist der Schnitt im allgemeinen entweder ein einfaches Vierseit (Fig. 3[a]) oder ein Dreiseit (Fig. 3[b]), je nachdem auf jeder Seite der schneidenden Ebene zwei der vier Ecken des Vierflachs liegen oder nicht. Und dieser Unterschied in der Deutung tritt auch im allgemeinen Falle des Schnittes eines $S(n+1)$ mit einem Raume R_{n-1} seines R_n auf. Bei der ersten Anschauungsweise hat man es immer mit einer Figur zu tun, welche aus $n+1$ Räumen R_{n-2} und ihren $(n+1)_2$ Schnittträumen R_{n-3}, ihren $(n+1)_3$ Schnittträumen $R_{n-4}, \ldots,$ ihren $(n+1)_{n-2} = (n+1)_3$ Schnittgeraden und ihren $(n+1)_{n-1} = (n+1)_2$ Schnittpunkten besteht und deshalb ein vollständiger $n+1$-R_{n-2} ist; bei der zweiten Anschauungsweise ändert sich hingegen das Resultat mit der Verteilung der $n+1$ Ecken in zwei zu verschiedenen Seiten des Schnittraumes R_{n-1} liegenden Gruppen. So gibt die folgende Tabelle die Zahlen der Ecken, Kanten, ... und Seitenräume R_7 der Schnitte eines $S(10)$ mit einem R_8 an, der in dem durch dieses $S(10)$ bestimmten R_9 liegt, und zwar für die fünf verschiedenen Fälle, wo die Zerlegung von 10 in zwei Summanden der Reihe nach durch (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5) angedeutet wird.

	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
$(1, 9)_0$	9	36	84	126	126	84	36	9
$(2, 8)_0$	16	64	140	196	182	112	44	10
$(3, 7)_0$	21	84	175	231	203	119	45	10
$(4, 6)_0$	24	96	194	246	209	120	45	10
$(5, 5)_0$	25	100	200	250	210	120	45	10

Die Ableitung dieser Tabelle wird wesentlich erleichtert mit Hilfe einiger bruchähnlicher Symbole $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{5}$, welche man bei Ersetzung der Zahlen durch eine entsprechende Anzahl von Punkten als schematische Vorstellung der senkrechten Projektion der Eckpunkte des Simplex $S(10)$ und des Schnittraumes R_8 auf irgend eine zu R_8 normale Ebene betrachten kann. So findet man z. B. im dritten Falle des $(3, 7)_0$:

21 Ecken, denn die drei Punkte oben lassen sich durch $(3)_1 \cdot (7)_1$ Geraden mit den sieben Punkten unten verbinden;

84 Kanten, denn von jeder dem Schnittraum begegnenden dreieckigen Seitenfläche liegen entweder eine Ecke oben und zwei unten oder umgekehrt zwei oben und eine unten, d. h. man findet $(3)_1 \cdot (7)_2 + (3)_2 \cdot (7)_1$;

175 Seitenflächen, denn es ist hier die gesuchte Zahl $(3)_1 \cdot (7)_3 + (3)_2 \cdot (7)_2 + (3)_3 \cdot (7)_1$, usw.

Die Hinzufügung der Null zu den Symbolen $(1, 9)$, $(2, 8)$, ... der Tabelle wird sich sofort als nützlich erweisen.

Aufgabe 7. Welche Beziehung besteht zwischen der algebraischen Multiplikation der Formen $3x^2 + 3x + 1$ und $7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1$, und den in der Horizontalreihe $(3, 7)_0$ obiger Tabelle stehenden Zahlen?

Es läßt sich die Anzahl

$$(p)_1 (q)_{k+1} + (p)_2 (q)_k + (p)_3 (q)_{k-1} + \ldots + (p)_{k-1} (q)_3 + (p)_k (q)_2 + (p)_{k+1} (q)_1$$

der Grenzräume R_k des Schnittes $(p, q)_0$ des Simplex $S(p+q)$ bedeutend vereinfachen. Denn es liefert die Bestimmung der Koeffizienten von x^{k+2} auf beiden Seiten der selbstverständlichen Beziehung

$$(1 + x)^p \cdot (1 + x)^q = (1 + x)^{p+q}$$

die bekannte Identität

$$(p)_0 (q)_{k+2} + (p)_1 (q)_{k+1} + \ldots + (p)_{k+1} (q)_1 + (p)_{k+2} (q)_0 = (p + q)_{k+2}.$$

Deshalb kann die gesuchte Anzahl der Räume R_k auf die Form

$$(1) \qquad (p + q)_{k+2} - (p)_{k+2} - (q)_{k+2}$$

gebracht werden, welche sich sogar auf $(p + q)_{k+2}$ reduziert, falls $k + 2$ größer ist als jeder der beiden Summanden p, q.

Von den fünf im vorhergehenden Beispiele erhaltenen Schnittfiguren ist nur die erste ein Simplex $S(9)$ und deshalb auch eine zweiseitig geschlossene Konfiguration, während hingegen die vier anderen niemals Simplexe und im allgemeinen auch keine Konfigurationen sind.

Die angegebene Gedankenreihe weiter verfolgend, betrachten wir außer der Schnittfigur im R_{n-1} die beiden Teile,

in welche dieser R_{n-1} das $S(n+1)$ zerlegt. Allein es läßt sich unmittelbar zeigen, daß das Studium dieser Teile sich auf das Studium von Schnittfiguren eines $S(n+2)$ reduziert. Bezeichnen nämlich künftighin die Symbole $(p, q)_0 = (q, p)_0$ auch die Reihe der charakteristischen Zahlen der Schnittfigur eines $S(p+q)$ mit einem im Raume R_{p+q-1} des $S(p+q)$ liegenden Raume R_{p+q-2}, welcher das System der $p+q$ Eckpunkte dieses $S(p+q)$ in zwei Gruppen von p und q Eckpunkten, und das $S(n+1)$ selbst in die Teile T_p und T_q zerlegt, und geben (p, q) und (q, p) ohne Index Null in derselben Weise die diesen beiden Polytopen T_p und T_q entsprechenden Zahlenreihen an, so gilt allgemein die Beziehung

$$(2) \qquad (p, q)_0 = (p, q-1) = (q, p-1).$$

So ergibt sich $(2, 2)_0 = (2, 1)$ in Fig. 3[a] und $(3, 1)_0 = (3, 0) = (1, 2)$ in Fig. 3[b], wobei man zunächst p_1 als Schnittlinie des Dreiseits $p_2 p_3 p_4$, nachher p_4 als Schnittlinie des Dreiecks $P_{12} P_{13} P_{23}$ betrachtet; so ergibt sich aus beiden

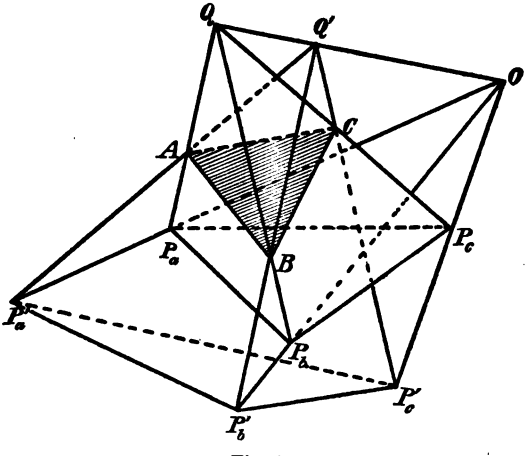


Fig. 4.

Teilen $(2, 2) = (3, 1)$. Der Beweis des speziellen Falles $(2, 3)_0 = (3, 1)$ wird leicht aus einer vierdimensionalen Figur abgelesen. Wird nämlich (Fig. 4) das Vierflach $P_a P_b P_c Q = S(4)$ durch die Ebene ABC in ein Fünfflach $ABCP_a P_b P_c = T_p$ mit dem Symbole (3, 1) und ein Vierflach $ABCQ = T_q$

mit dem Symbole (1, 3) zerlegt, so konstruiert man folgendermaßen ein $S(5)$, für welches der Körper T_p ein Schnitt ist. Man nimmt in irgend einem durch $S(4)$ gehenden Raume R_4 einen Punkt O beliebig und im Geradensegmente OQ einen nicht zu weit von Q entfernten Punkt Q' an, damit die drei Schnittpunkte

$$(OP_a, Q'A) = P'_a, \quad (OP_b, Q'B) = P'_b, \quad (OP_c, Q'C) = P'_c$$

jedesmal am von O verschiedenen Endpunkte außerhalb der Segmente OP_a, OP_b, OP_c liegen. Es hat dann das Simplex $S(5) = OQ'P'_aP'_bP'_c$ im R_4 in bezug auf den Raum R_3 des gegebenen $S(4)$ eine solche Lage, daß die zwei Ecken O, Q' sich auf der einen, die drei Ecken P'_a, P'_b, P'_c sich auf der andern Seite dieses Raumes R_3 befinden; d. h. der Schnitt $(2, 3)_0$ des $S(5)$ mit diesem Raume R_3 ist eben das vom Symbole (3, 1) gekennzeichnete Polytop T_p. Also ist (3, 1) $= (2, 3)_0$ und findet man, in Verbindung mit dem obigen Resultate $(2, 2) = (3, 1)$, nun $(2, 3)_0 = (2, 2) = (3, 1)$.

Aus obigen Betrachtungen leitet man folgenden allgemeinen Beweis ab. Sind in einem R_{p+q-1} ein $S(p+q)$ und ein Schnittraum R_{p+q-2} so gegeben, daß p der Ecken P des Simplex auf der einen, die übrigen q Ecken Q also auf der andern Seite vom R_{p+q-2} liegen und dieser Raum das $S(p+q)$ somit in zwei Polytope T_p, T_q mit den Symbolen (p, q), (q, p) zerlegt, so wähle man außerhalb R_{p+q-1} einen Punkt O und lege im Raume $R_{p+q} = (R_{p+q-1}, O)$ durch R_{p+q-2} einen neuen Raum R'_{p+q-1} derart, daß jede der q Geraden OQ_i in einem Punkte Q'_i des Segmentes OQ_i, hingegen jede der p Geraden OP_i in einem auf der Seite von P_i außerhalb des Segmentes OP_i liegenden Punkte P'_i geschnitten wird. Dann bilden die Projektionen P'_i, Q'_i der $p+q$ Ecken des $S(p+q)$ aus O auf R'_{p+q-1} mit O die Ecken eines $S(p+q+1)$ und liegen p von diesen Ecken, die Punkte P'_i, auf der einen und die $q+1$ übrigen Ecken, die q Punkte Q'_i und O, auf der andern Seite von R_{p+q-1}; deshalb ist die Schnittfigur dieses $S(p+q+1)$ mit R_{p+q-1}, d. h. das gegebene Polytop T_p mit dem Symbole (p, q), ein $(p, q+1)_0$.

Mittels der Beziehung (2) wird aus der Anzahl (1) der Räume R_k, welche den Schnitt $(p, q)_0$ begrenzen, die Anzahl

$$(3) \qquad (p+q+1)_{k+2} - (p)_{k+2} - (q+1)_{k+2}$$

der Grenzräume R_k des Schnitteiles (p, q) abgeleitet. Dieses Resultat wird leicht auf anderem Wege bestätigt. Es wird nämlich die Zahl der Grenzräume R_k des Teiles (p, q) erhalten, indem man die Zahl (1) der Grenzräume R_k des Schnittes $(p, q)_0$ um die Zahl der ganz oder teilweise auf der Seite des Stückes (p, q) liegenden Grenzräume R_k von $S(p+q)$ vermehrt. Und diese Zahl der ganz oder teilweise mit (p, q) auf der nämlichen Seite des Schnittraumes R_{p+q-2} liegenden Grenzräume R_k von $S(p+q)$ wird gefunden, indem man die vollständige Anzahl $(p+q)_{k+1}$ der Grenzräume R_k von $S(p+q)$ um die Zahl $(q)_{k+1}$ der jenseits des Schnittraumes R_{p+q-2} liegenden aus den q Punkten Q zu bildenden Grenzräume R_k verringert. Also findet man

$$(p+q)_{k+2} - (p)_{k+2} - (q)_{k+2} + (p+q)_{k+1} - (q)_{k+1},$$

was sich unmittelbar in den Ausdruck (3) umbilden läßt. So ergibt sich für den betrachteten Fall des $S(10)$ die Tabelle

	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8
(1, 9)	10	45	120	210	252	210	120	45	10
(2, 8)	18	81	204	336	378	294	156	54	11
(3, 7)	24	108	260	406	434	322	164	55	11
(4, 6)	28	126	294	441	451	329	165	55	11
(5, 5)	30	135	310	455	461	330	165	55	11

welche sich nun vervollständigen läßt durch die Beziehungen

$$(2,8) = (9,1),\ (3,7) = (8,2),\ (4,6) = (7,3),\ (5,5) = (6,4).$$

Trifft der Schnittraum R_{n-1} nur die in einen bestimmten Eckpunkt P zusammenlaufenden Grenzelemente eines Simplex $S(n+1)$, so sagt man „dieser R_{n-1} stumpft das $S(n+1)$ an der Ecke P ab“. Der bei dieser Deutung fortfallende Teil ist dann wieder ein Simplex $S'(n+1)$, der übrig bleibende Teil kann „ein abgestumpftes Simplex“ heißen. Allein das letztere Polytop hat — vergleiche das Fünfflach $ABCP_aP_bP_c$ von Fig. 4 — fast alle das Simplex auszeichnende Merkmale verloren. So sind von den fünf Seitenflächen zwei dreieckig und drei viereckig, von den neun Kanten sechs die Schnittlinien zweier Seitenflächen verschiedener Gattung und drei die Schnittlinien zweier viereckigen

Seitenflächen; nur die sechs Eckpunkte sind gleichwertig geblieben, indem jeder Eckpunkt in einer dreieckigen und in zwei viereckigen Seitenflächen liegt. Mit den viereckigen Seitenflächen treten sechs Diagonalen, die Diagonalenpaare dieser drei Vierecke auf. Und die Polarität des Körpers ist völlig verschwunden, indem man sogar von Gegenelementen nicht mehr reden kann.

Aufgabe 8. Beweise, daß der Verlust der kennzeichnenden Merkmale nicht dem Umstande zuzuschreiben ist, daß die Abstumpfung an einer einzigen Ecke stattfand.

Der Zahl nach wird die Gruppe der Grenzelemente des durch Abstumpfung des Simplex $S(n+1)$ erzeugten Polytops erhalten, indem man die Gruppe der Grenzelemente der Schnittfigur, welche ein $S(n)$ ist, zu der um eine Ecke verminderten Gruppe der Grenzelemente des $S(n+1)$ addiert; d. h. das neue Polytop hat $2n$ Ecken, $(n+1)_2 + (n)_2$ oder n^2 Kanten, $(n+1)_3 + (n)_3$ oder $\frac{1}{6}(2n-1)n(n-1)$ Seitenflächen, usw.

Man nennt eine zwei Eckpunkte eines Polytops verbindende Gerade eine „Diagonale k-ter Gattung", wenn das sie enthaltende Grenzelement der niedrigsten Dimensionenzahl ein R_{k+1} ist, und beweist nun folgendermaßen, daß das abgestumpfte Simplex nur Diagonalen erster Gattung zuläßt. Ist P die abgestumpfte Ecke, so sind die ursprünglich dreieckigen Seitenflächen durch P viereckig geworden, und es gesellen sich somit zu den $(n)_3$ dreieckigen Seitenflächen des dem Punkte P gegenüberliegenden Grenzsimplex $S(n)$ die $(n)_3$ dreieckigen Seitenflächen des Schnittsimplex, was im ganzen wieder zu $(n)_2 + 2(n)_3$ oder $\frac{1}{6}(2n-1)n(n-1)$ Seitenflächen führt; deshalb gibt es $(n)_2$ Paare von Diagonalen erster Gattung. Weil nun einerseits die $2n$ Eckpunkte $(2n)_2$ oder $n(2n-1)$ Verbindungsgeraden liefern, andererseits die Summe der Zahlen n^2 und $2(n)_2$ von Kanten und Diagonalen erster Gattung ebenfalls $n(2n-1)$ beträgt, so müssen die Zahlen der Diagonalen höherer Gattung sämtlich verschwinden.

7. Schein des Simplex. Beschränkt man sich bei der Bestimmung des Scheines des $S(n+1)$ aus einem außerhalb dieses Simplex liegenden Punktes O seines Raumes R_n immer

auf die Halbstrahlen durch O, welche mit dem von $S(n+1)$ eingeschlossenen Teile dieses R_n wirklich ein Segment gemein haben, so ändert sich das Resultat mit der Zeichenreihe der normalen Abstandskoordinaten des Punktes O in bezug auf $S(n+1)$ als Koordinatensimplex. Dabei ergibt sich unmittelbar, daß die zwei Räume R_{n-1}, welche irgend einen Grenzraum R_{n-2} des Simplex verbinden mit zwei Punkten O, O', deren gleichnamige Koordinaten entgegengesetzte Vorzeichen haben, sich rücksichtlich ihrer Schnittpunkte mit dem R_{n-2} gegenüberliegenden Kantensegmente ganz gleichartig verhalten, und also beide entweder das Simplex durchschneiden oder dasselbe auf einer Seite liegen lassen. So kann man beim $S(6)$ die drei Fälle

$$\left.\begin{matrix}(-+++++)\\(+-----)\end{matrix}\right|, \quad \left.\begin{matrix}(--++++)\\(++----)\end{matrix}\right|, \quad (---+++)$$

als $(1, 5)_0$, $(2, 4)_0$, $(3, 3)_0$ voneinander unterscheiden, und ergeben sich beim $S(10)$ ganz wie in der vorhergehenden Nummer die fünf Fälle $(1, 9)_0$, $(2, 8)_0$, $(3, 7)_0$, $(4, 6)_0$, $(5, 5)_0$. Ja, die dort mitgeteilte Tabelle von kennzeichnenden Zahlen findet hier, wenn nur die Überschrift $R_0, R_1, \ldots, R_7$ durch $R_8, R_7, \ldots, R_1$ ersetzt wird, sogar ungeändert Anwendung. Werden nämlich — um bei diesem Beispiele zu bleiben — in bezug auf das $S(10)$ als Koordinatensimplex zwei einander dual entgegengesetzte homogene Koordinatensysteme $(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$, $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{10})$ von Punkten und Räumen R_8 derart angenommen, daß die Gleichung $\sum_1^{10} \xi_i x_i = 0$ die vereinigte Lage von Punkt und Raum R_8 angibt, so kann man jedem Punkte mit den Koordinaten $(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$ den Raum R_8 mit den nämlichen Koordinaten $\xi_i = \varrho x_i$, $(i = 1, 2, \ldots, 10)$ zuordnen. Und dann ergibt sich unmittelbar, daß zwei einander entsprechende Elemente, der Punkt P' und der Raum R_8', bei Schein- und Schnittbildung sich in bezug auf irgend zwei Gegenelemente des $S(10)$ gleichartig verhalten; d. h. schneidet der Raum R_8' die Kante $P_1P_2 = p^{(1,2)}$ des $S(10)$ in einem zwischen P_1 und P_2 liegenden und also zum Schnitte mit R_8' gehörigen Punkte P, so läßt der durch den entsprechenden Punkt P' und den Gegenraum $P_3P_4 \ldots P_{10} = R_7^{(1,2)}$ des Simplex bestimmte Raum R_8 das

Simplex ganz auf einer Seite liegen und gehört dieser Raum $R_8 = (P', R_7^{(1,2)})$ der Begrenzung des Scheines von $S(10)$ aus P' an, usw.

Die angewiesene Übereinstimmung der Resultate bei Schnitt- und Scheinbildung kann noch einen Schritt weiter verfolgt werden. Entspricht im Falle des Raumes im Polarsystem mit dem Polsimplex $ABCD = S(4)$ dem Punkte O, welcher mit den Kanten BC, CA, AB des $S(4)$ die Grenzelemente des Scheines liefert, die Ebene ω, welche die Gegenkanten AD, BD, CD in den drei Eckpunkten A', B', C' des Schnittes schneidet, so entsprechen den Ecken, Kanten und Seitenflächen der beiden Teile $A'B'C'D$ und $ABCA'B'C'$ des Vierflachs $ABCD$ die Seitenflächen, Kanten und Ecken des Vierflachs $ABCO$ und des Sechsflachs $OABCD$; sind (4, 6, 4) und (6, 9, 5) die Zahlen der Ecken, Kanten und Seitenflächen von $A'B'C'D$ und $ABCA'B'C'$, so sind sie deshalb auch die Zahlen der Seitenflächen, Kanten und Ecken von $ABCO$ und $OABCD$. Und ist allgemein ein Simplex $S(n+1)$ und im Raume dieses Simplex ein Punkt O außerhalb des Simplex gegeben, so wird die Begrenzung dieses Simplex durch den im Scheine aus O liegenden Ring von Grenzräumen R_{n-2} in zwei Teile geteilt, und es schließt jeder dieser Teile mit dem sich in diesem Ringe an ihn anlehnenden Teile des Scheines ein Polytop ein; die so erhaltenen Polytope, von welchen das eine um das $S(n+1)$ größer ist als das andere, entsprechen dann rücksichtlich ihrer Grenzelemente wieder den beiden Teilen, in welche das $S(n+1)$ zerlegt wird durch den Raum R_{n-1}, welcher im oben angeführten Polarsysteme mit $S(n+1)$ als Polsimplex dem Punkte O entspricht. Deshalb kann die zweite Tabelle der vorhergehenden Nummer nach Ersetzung der Überschrift $R_0, R_1, \ldots, R_8$ durch $R_8, R_7, \ldots, R_0$ Anwendung finden bei den verschiedenen Teilen des Scheines des $S(10)$.

Ist von den in bezug auf das $S(n+1)$ als Koordinatensimplex genommenen Abstandskoordinaten des Punktes O nur eine einzige negativ, so sagt man „der auf einem Seitenraume R_{n-1} des $S(n+1)$ aufsitzende Scheinteil, welcher selbst wieder ein Simplex ist, spitzt das gegebene $S(n+1)$ an diesem Seitenraume R_{n-1} zu." Wie die abgestumpften Simplexe, so haben auch die zugespitzten fast alle das Simplex kennzeichnenden Eigenschaften verloren.

Aufgabe 9. Beweise, daß das zugespitzte Simplex im R_n nur eine Diagonale besitzt und diese Diagonale von der höchsten, d. h. von der $(n-1)$-ten Gattung ist.

8. Polyedrale Konfigurationen. Nimmt man im Raume fünf Punkte willkürlich an, so bestimmen diese zusammen eine Figur von $(5)_2 = 10$ Verbindungsgeraden und $(5)_3 = 10$ Verbindungsebenen, welche von irgend einer willkürlich gewählten Ebene geschnitten werden in den 10 Punkten und 10 Geraden der bekannten Konfiguration $\left|\begin{matrix}10, & 3\\ 3, & 10\end{matrix}\right|$, welche die einfachste an beiden Seiten offene Konfiguration bildet. Diese Konfiguration tritt bei der schönen Figur der 60 Pascalschen Linien und 60 Kirkmanschen Punkte sechsmal auf; ihre einander gegenüberliegenden, d. h. aus zusammen durch die fünf Raumpunkte gehenden Gerade und Ebene abgeleiteten Elemente, entsprechen einander in einem bestimmten Polarsysteme (I 116_7).

Nimmt man allgemeiner im Raume R_n eine Anzahl von $n+k$ Punkten beliebig an, so bestimmen diese $(n+k)_{n-1}$ Räume R_{n-2} und $(n+k)_n$ Räume R_{n-1}. Wird nun das System dieser Räume R_{n-2} und R_{n-1} durch eine Ebene des Raumes R_n geschnitten, so erhält man eine Konfiguration $\left|\begin{matrix}(n+k)_{n-1}, & (k+1)_1\\ (n)_1 & , (n+k)_n\end{matrix}\right|$. Diese von verschiedenen Mathematikern betrachtete ebene Konfiguration ist in der angegebenen Weise durch Veronese und Schubert aus dem Raume R_n abgeleitet worden; sie beschränkten diese Anwendung der mehrdimensionalen Geometrie selbstverständlich nicht auf die Ebene, sondern konstruierten mit Hilfe der $n+k$ willkürlichen Punkte von R_n auch räumliche und mehrdimensionale Konfigurationen. Indem man nämlich das System der durch diese Punkte bestimmten $(n+k)_{n-p+1}$ Räume R_{n-p}, $(n+k)_{n-p+2}$ Räume $R_{n-p+1}, \ldots, (n+k)_{n-1}$ Räume R_{n-2} und $(n+k)_n$ Räume R_{n-1} durch einen willkürlichen Raum R_p des R_n schneidet, findet man in diesem R_p eine Konfiguration, für welche nach dem allgemeinen Schema der Nr. 4 die Elemente A_q der Hauptdiagonale $= (n+k)_{n-p+q-1}$, die Elemente $a_{s,r}$ rechts von der Hauptdiagonale $= (k+p-r-1)_{s-r}$ und die Elemente $a_{r,s}$ links von der Hauptdiagonale $= (n-p+s+1)_{s-r}$ sind.

9. Vorbereitende Bemerkungen zum Probleme der Einteilung der Polyeder. Der Theorie der Polyeder ist eine umfangreiche Literatur gewidmet. Hier mögen in erster Linie zwei bedeutungsvolle Musterarbeiten erwähnt werden, nämlich V. Eberhards *Zur Morphologie der Polyeder* und M. Brückners *Vielecke und Vielflache, Theorie und Geschichte,* von welchen die erstere 1891, die letztere 1900 erschien; hauptsächlich auf das letztere Werk werden wir vielfach verweisen müssen.

Wird jede Ecke eines Polyeders von drei Seitenflächen begrenzt, so nennt man mit Eberhard das Polyeder *allgemein;* gehen auch nur durch einen einzigen Eckpunkt eines Polyeders vier Kanten, so heißt das Polyeder *singulär.* Und ein Polyeder mit lauter Dreiecksflächen heißt *Dreiecksvielflach* oder *Trigonalpolyeder.*

Aufgabe 10. Würde es sich in bezug auf das Gesetz der Dualität (I 97) nicht empfehlen die allgemeinen Polyeder *punkt-allgemein,* die Trigonalpolyeder *flächen-allgemein* und die andern Polyeder *gemischt* zu nennen?

Sind alle Flächenwinkel eines Polyeders kleiner als 180^0, so liegt dieser Körper ganz auf einer der beiden Seiten irgend einer seiner als unendlich ausgebreitet vorausgesetzten Seitenflächen und man kann ihn also mit einer willkürlich gewählten Seitenfläche auf einer gegebenen Ebene, sagen wir auf dem dann ebenfalls unendlich ausgedehnt vorausgesetzten Tisch, ruhen lassen. Ein solches Polyeder nennt man *konvex.*

Konvexe Polyeder sind auch durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß eine Gerade ihre Begrenzung in höchstens zwei vereinzelt liegenden Punkten schneiden kann. Hiermit hängt zusammen, daß die Parallelprojektion der begrenzenden Seitenflächen eines konvexen Polyeders auf eine willkürlich gewählte Ebene ein zweimal überdecktes konvexes Vieleck ist.

Wenn hingegen auch nur einer der Flächenwinkel eines Polyeders überstumpf ist, so wird die Ausbreitung irgend einer der beiden diesen Winkel bildenden Seitenflächen den Körper in zwei Teile zerlegen und es deshalb unmöglich sein ihn mit einer dieser beiden Seitenflächen auf dem unendlich ausgedehnt vorausgesetzten Tisch ruhen zu lassen. Solche nichtkonvexe Polyeder werden von der Betrachtung ausgeschlossen.

Wendet man bei der Projektion eines konvexen Polyeders auf irgend eine Seitenfläche die zentrale Projektion an, so kann man das Projektionszentrum immer so wählen, daß die nicht in der Bildebene liegenden Eckpunkte des Polyeders sich innerhalb des in der Bildebene liegenden Polyedervielecks projizieren. In diesem Falle bildet dieses Vieleck den „scheinbaren Umriß" des Körpers und rührt die eine der oben angeführten zweimaligen Bedeckungen dieses Vielecks von einer einzigen Seitenfläche — der als Projektionsebene verwendete —, die andre von allen übrigen Seitenflächen her. So erscheint (Fig. 5) jedes der beiden in zwei Sechsecke, zwei Fünfecke, ein Viereck und drei Dreiecke verteilten Siebenecke als die zentrale Projektion eines von einem Siebeneck, zwei Sechsecken, zwei Fünfecken, einem Viereck

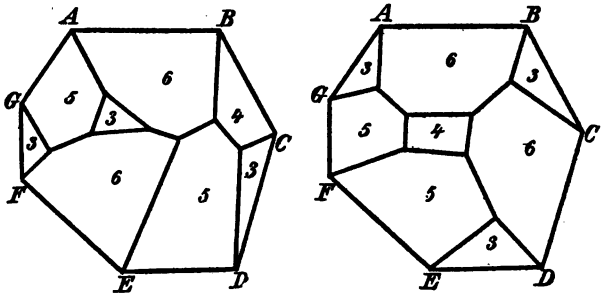


Fig. 5.

und drei Dreiecken begrenzten Polyeders mit 14 Eckpunkten, 21 Kanten und 9 Seitenflächen, welches offenbar ein allgemeines Polyeder ist. Und umgekehrt kann man aus der Möglichkeit, ein ebenes Siebeneck in der angegebenen Weise zu teilen, auf die Existenz eines solchen Polyeders schließen. Es erweist sich diese in ihrer allgemeinsten Form wohl von V. Schlegel herrührende Verknüpfung der „Morphologie der Polyeder" mit einer einfachen planimetrischen Aufgabe besonders nützlich. So zeigt eine einfache Vergleichung obiger beiden Polyeder unter sich unmittelbar, daß es zur Kennzeichnung eines allgemeinen Polyeders nicht ausreicht neben den Zahlen der Ecken, Kanten und Flächen nur noch die Eckenzahl jeder Seitenfläche anzugeben, sondern daß man

auch angeben muß, wie die verschiedenen Vielecke aneinander schließen. Mit Eberhard nennt man zwei Polyeder, welche in Ecken-, Kanten- und Flächenzahl miteinander übereinstimmen, schon dann *allomorph*, wenn sie wie die beiden Polyeder der Fig. 5 auch in bezug auf die Eckenzahlen der begrenzenden Vielecke einander gleich sind, und erst dann *isomorph*, wenn diese Vielecke bei beiden auf die nämliche Weise aneinander schließen.

Nennt man die zentrale Projektion eines Polyeders auf irgend eine Seitenfläche, wobei alle nicht in dieser Fläche liegenden Eckpunkte sich innerhalb der Fläche projizieren, das *Diagramm* des Polyeders in bezug auf diese Fläche, so folgt aus der Definition des Isomorphismus, daß isomorphe Polyeder in bezug auf einander entsprechende Seitenflächen isomorphe Diagramme liefern und umgekehrt isomorphen Diagrammen immer wieder isomorphe Polyeder entsprechen.

Aufgabe 10. Zwei kollinear verwandte Polyeder (I 101) sind immer isomorph; ist dieser Satz umkehrbar?

Allgemein kann behauptet werden, daß das Vierflach bei Wiederholung der Abstumpfung immer ein allgemeines Polyeder, bei Wiederholung der Zuspitzung immer ein Trigonalpolyeder liefert. Dabei muß dann die abstumpfende Ebene α bei Abstumpfung einer Ecke A nur die drei in A zusammenstoßenden Seitenflächen schneiden und der neue Punkt A bei Zuspitzung einer dreieckigen Seitenfläche α keinen überstumpfen Winkel erzeugen.

Aufgabe 11. Kann jedes allgemeine Polyeder durch eine solche wiederholte Abstumpfung des Vielflachs erzeugt werden?

[Der Würfel beweist das Gegenteil; weshalb?]

Sind von drei Polyedern A, B, C einerseits A und B reziprok verwandt (I 114) und andererseits A und C entweder allomorph oder isomorph, so nennen wir B und C entweder *polar-allomorph* oder *polar-isomorph*. Endlich möge ein Polyeder, welches im Bau seiner Grenzelemente eine vollständige Dualität zeigt, *polar-reziprok* zu sich selbst oder *autopolar* heißen, je nachdem es in einem Polarsysteme (I 116) sich selbst entspricht oder nicht.

Aufgabe 12. Wende die Kombination der beiden Operationen des Abstumpfens und des Zuspitzens auf jede Ecke des Vierflachs an und untersuche, ob das so erzeugte Polyeder autopolar ist.

Oben — vergleiche Aufgabe 11 — ist gefunden worden, daß wiederholtes Abstumpfen des Vierflachs nicht zu allen überhaupt möglichen konvexen allgemeinen Polyedern führen kann; jetzt möge behauptet werden, daß diese letzteren natürlich wohl mit Hilfe von allgemeineren, der Bedingung nur die drei in einem Eckpunkt zusammenstoßenden Seitenflächen zu schneiden nicht unterworfenen Schnittebenen aus dem Tetraeder abgeleitet werden können. Da wir schon wissen — vergleiche die beiden Fälle von Fig. 3 —, daß

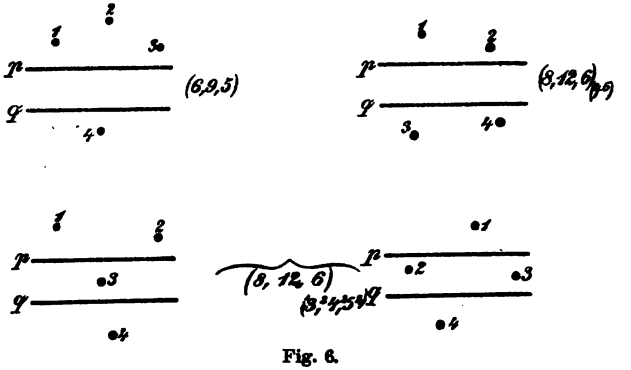


Fig. 6.

es nur ein allgemeines Fünfflach gibt, so möge dieser Gedanke am Schlusse dieser Nummer zur Bestimmung aller allgemeinen sechsflächigen Polyeder verwertet werden. Dabei behandeln wir nacheinander die zwei Fälle, wo die Schnittlinie der beiden das Vierflach schneidenden Ebenen entweder ganz außerhalb oder teilweise innerhalb des Vierflachs verläuft, in welchen beiden Fällen der Reihe nach drei und vier Raumstücke entstehen.

Projiziert man das Vierflach mit den beiden Schnittebenen senkrecht auf eine zur Schnittlinie dieser Ebenen normale Ebene, so ergeben sich, wenn diese Schnittlinie ganz außerhalb des Tetraeders mit den Ecken 1, 2, 3, 4 liegt, die vier Fälle der Fig. 6, wobei selbstverständlich

jedesmal nur der mittlere der drei Schnittteile zu untersuchen ist. Der erste Fall jedoch (oben links) ist sofort zu unterdrücken, weil der mittlere Teil ein Fünfflach ist. Der zweite Fall (oben rechts) liefert dann ein Polyeder (8, 12, 6), welches, weil die Seitenflächen viereckig sind, als $(8, 12, 6)_4$ bezeichnet werden kann; von diesem mit einem Würfel isomorphen Körper zeigt Fig. 7 das körperliche Bild und das Diagramm. Und die beiden übrigen Fälle (unten links und rechts) führen beide zum nämlichen als $(8, 12, 6)_{3^2, 4^2, 5^2}$

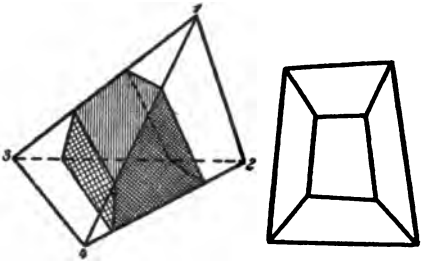


Fig. 7.

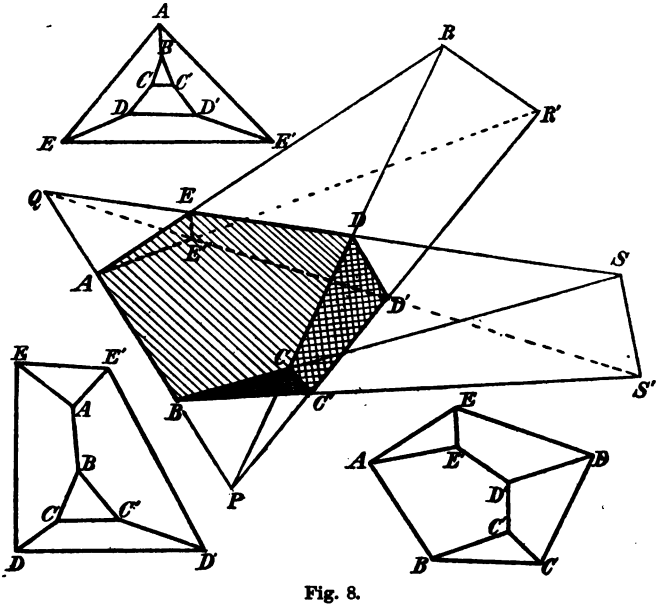


Fig. 8.

zu bezeichnenden Körper, weil dieser Schnitt (8, 12, 6) von zwei Dreiecken, zwei Vierecken und zwei Fünfecken be-

grenzt wird; von diesem Körper gibt Fig. 8 das der Erzeugung unten rechts entsprechende körperliche Bild und die drei Diagramme in bezug auf Dreieck, Viereck und Fünfeck. Letzterer Körper gehört zu der allgemeinen Kategorie der Hufe, unter *Huf* ein Polyeder verstanden, welches von zwei mit einer Kante (*Ferse*) AB aneinander schließenden ebenen n-Ecken $ABCD \ldots P$, $ABC'D' \ldots P'$, zwei Dreiecken APP', BCC' und $n-3$ Vierecken $CC'D'D$, $DD'E'E$, ... begrenzt wird. Die Gleichwertigkeit der beiden Fälle der unteren Hälfte der Fig. 6 wird unmittelbar aus dieser Figur abgelesen; denn der beiderseits unter der ersten Schnittebene p liegende Teil des Tetraeders ist ein $(2, 2) = (3, 1)$, und die zweite Schnittebene stumpft diesen fünfflächigen Körper an der Ecke 4 ab. Wirklich ist (Fig. 8) der Huf $ABCDE$, $ABC'D'E'$ sowohl aus dem Tetraeder APR'

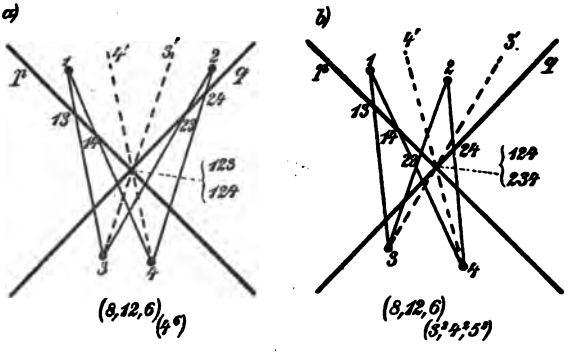


Fig. 9.

mittels der Schnitte BCC', QSS' und aus dem Tetraeder $BQSS'$ mittels der Schnitte AEE', PRR' wie aus dem Tetraeder $DD'PQ$ mittels der Schnitte BCC', AEE' abzuleiten.

Liegt die Schnittlinie der beiden schneidenden Ebenen teilweise innerhalb des Tetraeders, so hat man nach der Verteilung der vier Eckpunkte zunächst fünf Fälle zu unterscheiden. Allein es reicht diese Unterscheidung nicht aus. Betrachtet man nämlich (Fig. 9) den Fall, wo jeder von zwei einander gegenüberliegenden Diedern zwei Eckpunkte

enthält, und teilt man das die Eckpunkte 1, 2 enthaltende Dieder mittels der durch die Schnittlinie und je eine der Ecken 3, 4 geführten Ebenen in drei Teile, so ist auch die Verteilung der Punkte 1, 2 über diese drei Teile von Einfluß. Liegt im Mittelteile keiner der Punkte 1, 2, so findet man (Fig. 9^a) das Polyeder $(8, 12, 6)_{4^6}$; liegt in diesem Teile einer der beiden Punkte 1, 2, so findet man (Fig. 9^b) das Polyeder $(8, 12, 6)_{3^2, 4^2, 5^2}$. In beiden Fällen liegen auf der Schnittlinie zwei der acht Ecken; diese rühren links von den Seitenflächen (123), (124) und rechts von den Seitenflächen (124), (234) her. Es bringt jedoch kein einziger Fall der fünf Gruppen einen neuen Körper mit sechs Seitenflächen hervor.

Aufgabe 13. Vom Hufe $(8, 12, 6)_{3^2, 4^2, 5^2}$ geht man wieder zum Tetraeder zurück durch Unterdrückung irgend zweier der sechs Seitenflächen und Ausbreitung der vier andern bis sie einen Teil des Raumes einschließen. Erhält man in jedem der $(6)_2 = 15$ möglichen Fälle ein Tetraeder, von welchem der Huf ein Teil ist?

Weil es zwei verschiedene Gattungen von allgemeinen Sechsflachen (8, 12, 6) gibt, so muß es auch zwei zu diesen polar-isomorphe Trigonalpolyeder (6, 12, 8) geben. Das zu $(8, 12, 6)_{4^6}$ polar-isomorphe Polyeder muß sechs vierkantige Ecken haben; es ist in Fig. 10 körperlich und im Diagramm

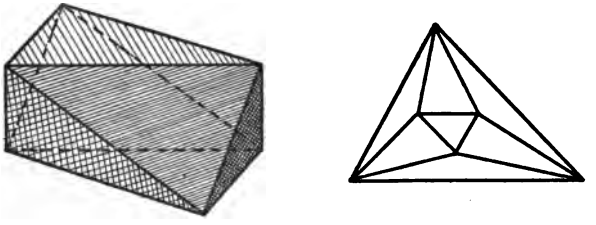


Fig. 10.

dargestellt und erinnert der Form nach an das regelmäßige Oktaeder, mit welchem es isomorph ist. Und der zum Hufe $(8, 12, 6)_{3^2, 4^2, 5^2}$ isomorphe Körper hat hinsichtlich der Anzahl der in seinen Ecken zusammentreffenden Kanten drei verschiedenartige Dreiecksflächen und also drei verschiedene Diagramme.

Aufgabe 14. Wie kennzeichnet man die zu der allgemeinen Gruppe der Hufe polar-isomorphe Polyedergruppe?

Von der Einteilung der Polyeder in Prismen, Pyramiden, Prismoiden, Hufe, usw. wird späterhin die Rede sein.

10. Analoges für die Einteilungsfrage der Polytope. Ohne Aufwand von komplizierten Figuren können die vorhergehenden Betrachtungen über Polyeder auf Polytope im R_n ausgedehnt werden. Dabei deuten wir ein von Räumen R_{n-1} eingeschlossenes Polytop durch das allgemeine Symbol $(Po)_n$ an und ändern insofern die Reihenfolge, als wir die Definition an die Spitze stellen.

Liegt ein Polytop $(Po)_n$ ganz auf der einen Seite irgend eines seiner als unendlich ausgebreitet vorausgesetzten Grenzräume R_{n-1}, so heißt es *konvex*. Nicht-konvexe Polytope werden von der Betrachtung ausgeschlossen.

Ein Polytop $(Po)_n$ heißt *allgemein*, wenn in jedem seiner Eckpunkte n seiner Seitenräume R_{n-1} zusammentreffen, und jedes nicht-allgemeine Polytop heißt *singulär*. Wird ein Polytop von lauter Simplexen begrenzt, so mag es ein *Simplexpolytop* heißen; so kann man im R_4 von *Vierflachszellen* oder *Tetraederpolytopen* reden.

Aufgabe 15. Alle Seitenflächen eines Tetraederpolytops des R_4 sind dreieckig; weshalb spricht man dann nicht lieber von „Trigonalpolytop“?

Ein konvexes Polytop wird von einer Geraden in höchstens zwei Punkten geschnitten. Deshalb ist die Parallelprojektion eines konvexen Polytops $(Po)_n$ auf irgend einen in seinem Raume R_n liegenden Raum R_{n-1} ein zweimal überdecktes, ebenfalls konvexes Polytop $(Po)_{n-1}$. Und bei Anwendung zentraler Projektion kann das Zentrum dann immer wieder so gewählt werden, daß die eine Bedeckung der Projektion von einem einzigen Seitenraume R_{n-1}, die zweite von den übrigen Seitenräumen R_{n-1} herrührt. Also deckt sich das Problem der Bestimmung aller Polytope $(Po)_n$ mit dem Probleme der Zerlegung eines Polytopes $(Po)_{n-1}$ in Polytope $(Po)_{n-1}$.

Den vorhergehenden Betrachtungen über Polyeder ist weiter unmittelbar zu entnehmen, was man bei Polytopen

unter *Abstumpfung* und *Zuspitzung* zu verstehen hat. Natürlich gilt auch hier wieder der Satz, daß Abstumpfung allgemeiner Polytope immer wieder allgemeine Polytope, Zuspitzung von Simplexpolytopen immer wieder Simplexpolytope liefert. Ebenso ist aus den vorbereitenden Erörterungen abzuleiten, in welchen Fällen man zwei Polytope *isomorph*, *allomorph*, *polar-isomorph* oder *polar-allomorph* nennt, und unter welchen Bedingungen ein Polytop *autopolar*, ja sogar *polar-reziprok* zu sich selbst ist. Auch im R_n nennt man die zentrale Projektion eines Polytops $(Po)_n$ auf irgend einen seiner Seitenräume R_{n-1}, wobei alle nicht in diesem R_{n-1} liegenden Eckpunkte sich innerhalb dieses $n-1$-dimensionalen Grenzraumes projizieren, das *Diagramm* des Polytops in bezug auf diesen R_{n-1}, und kann man aus dem Iso- oder Allomorphismus zweier Polytope auf jenen ihrer einander entsprechenden Diagramme schließen und umgekehrt. Und endlich kann, in Verbindung mit den Resultaten der Schnitt- und Scheinbildung beim Simplex $S(n+1)$, noch behauptet werden, daß es für ein gerades n nur $\frac{n}{2}$, für ein ungerades n nur $\frac{n-1}{2}$ im Sinne des Isomorphismus voneinander verschiedene allgemeine Polytope mit $n+2$ Seitenräumen R_{n-1} und Simplexpolytope mit $n+2$ Ecken gibt. Um uns nicht in Allgemeinheiten zu verlieren, betrachten wir nur den Fall $n=4$ etwas näher.

Aufgabe 16. Wende die Operation des Abstumpfens und des Zuspitzens in dieser Reihenfolge auf alle fünf Ecken eines $S(5)$ im R_4 an und berechne die Zahlen der Ecken, Kanten, Flächen, Räume und Diagonalen erster, zweiter und dritter Gattung des neuen Polytops.

Projiziert man das von einem R_3 geschnittene Simplex $S(5)$ des Raumes R_4 auf eine zu diesem R_3 normale Ebene, so leuchtet unmittelbar ein — vergleiche das Schema von Fig. 11 (Seite 30) —, daß die Schnitte vier allgemeine Polytope mit den beigefügten Zahlen von Ecken, Kanten, Flächen und Räumen sind. Diese Zahlen werden nämlich unmittelbar aus der Figur abgelesen. So erhält man — vergleiche die Ableitung der Formel (2) von Nr. 6 — die Kantenzahl 16 links unten, indem man zu den 10 Kanten des $S(5)$ die von den sechs durch die Ecke 1 hindurchgehenden Seitenflächen (1 2 3), (1 2 4), ..., (1 4 5) herrührenden Kanten des Schnittes

addiert; so resultiert die Flächenzahl (14) rechts oben mittels Addition der um die ganz auf der andern Seite des Schnittraumes liegenden Seitenfläche (3 4 5) verminderten 10 Flächen des $S(5)$ zu den von den Seitenräumen des $S(5)$ herrührenden fünf Flächen des Schnittes, usw.

Von den auf diese Weise erhaltenen vier Polytopen, welche früher [6] als (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2) bezeichnet worden sind, ist das erste wieder ein Simplex $S(5)$; also bleibt es hier, wo es sich um die vierdimensionalen Sechszelle handelt, außer Betracht. Wird also noch gezeigt, daß das zweite und das dritte Polytop nicht nur in der Zahlenreihe (8, 16, 14, 6) übereinstimmen, sondern wirklich isomorph sind, so ist bewiesen, daß es nur zwei Gattungen dieser Sechszelle gibt. Und diese Isomorphie beider Polytope (8, 16, 14, 6)

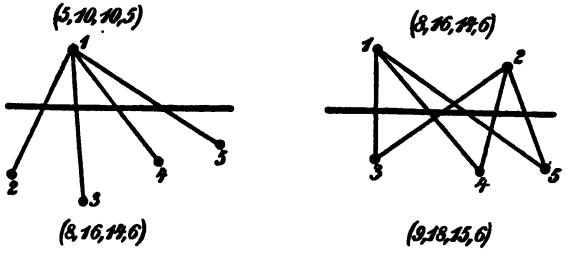


Fig. 11.

ist eine unmittelbare Folge der in der allgemeinen Formel (2) von Nr. 6 enthaltenen Eigenschaft, daß die beiden Zelle (4, 1), (2, 3) Schnitte $(4, 2)_0$ eines Simplex $S(6)$ des R_5 sind.

Das Sechszell (8, 16, 14, 6) wird von zwei Vierflachen und vier Fünfflachen begrenzt. Bei der ersten Erzeugungsweise (4, 1) liegen die Vierflache im Schnittraume und im Raume (2 3 4 5) von $S(5)$, die Fünfflache in den vier übrigen Seitenräumen des $S(5)$; bei der zweiten Erzeugungsweise (2, 3) liegen die Vierflache in den Räumen (1 3 4 5), (2 3 4 5) des $S(5)$, die Fünfflache in den drei übrigen Seitenräumen des $S(5)$ und im Schnittraume. Allen Fünfflachen entspricht das Symbol (6, 9, 5); wirklich fanden wir schon [6], daß es überhaupt nur eine Art von Fünfflachen gibt. Weil die beiden Vierflache durch den Ring der vier Fünfflache voneinander getrennt sind, so ist das Diagramm

des Sechszells (Fig. 12) entweder ein von einem zentralen Vierflache und vier ringsum liegenden Fünfflachen ausgefülltes Vierflach oder ein von zwei Vierflachen und drei

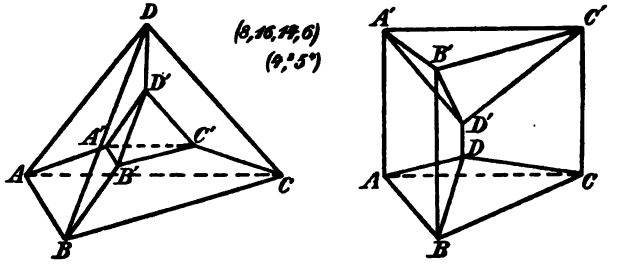


Fig. 12.

diese voneinander trennenden Fünfflachen ausgefülltes Fünfflach, je nachdem ein Vierflach oder ein Fünfflach als Projektionsraum angenommen wurde.

Es wird das Sechszell (9, 18, 15, 6) von sechs Fünfflachen begrenzt; also ist sein Diagramm (Fig. 13) ein von fünf Fünfflachen ausgefülltes Fünfflach.

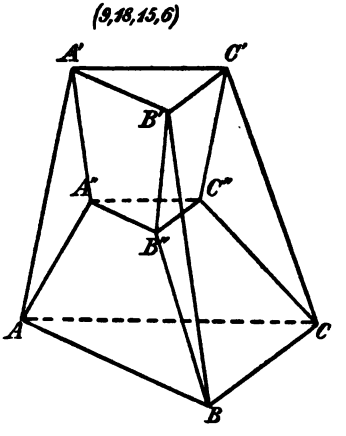


Fig. 13.

Die gefundenen Sechszelle sind, wie bemerkt wurde, allgemeine Polytope, weil in jeder Ecke vier Räume und deshalb auch vier Kanten zusammentreffen. Deshalb sind die polar-isomorphen vierdimensionalen Gebilde, die „Sechsecke" (6, 14, 16, 8) und (6, 15, 18, 9), Vierflachspolytope, woraus hervorgeht, daß das Diagramm des ersteren ein von sieben, das Diagramm des letzteren ein von acht Vierflachen ausgefülltes Vierflach sein muß. Das

erstere Gebilde (Fig. 14) wird sofort erhalten, wenn man im Vierflach $ABCD$ zunächst einen Punkt E annimmt, das Vierflach mittels der durch E und eine Kante gehenden sechs Ebenen ABE, ACE, ..., CDE in vier Vierflache zerlegt und diese Operation nachher in bezug auf den Teil $ABCE$ mit Hilfe eines im Innern dieses Vierflachs angenommenen Punktes F wiederholt. Wie es das Gesetz der Dualität erheischt, sind zwei der sechs Ecken, hier D und F, vierkantig, die übrigen vier fünfkantig, was wir wieder durch das Symbol $(4^2, 5^4)$ ausdrücken; ebenso gehen — vergleiche die den Kanten beigefügten Zahlen — durch acht der Kanten nur drei, durch die übrigen sechs Kanten vier Seitenflächen, weil vom Sechsflache (8, 16, 14, 6) acht der Seitenflächen Dreiecke, die sechs übrigen Vierecke sind. Und das zweite Gebilde scheint zunächst sogar unmöglich zu sein; denn die 15 Kanten bilden natürlich alle Verbindungen zu je zwei der sechs Ecken, und nun durchsetzt die in Fig. 14 noch fehlende Verbindungsgerade DF ein schon ausgefülltes Gebiet. Allein diese Unmöglichkeit ist bloß scheinbar. Teilt man nämlich das aus den vier Vierflachen mit gemeinschaftlicher Ecke E bestehende Vierflach $ABCD$ in zwei Stücke, deren jedes (Fig. 15) zwei der vier partiellen Vierflache enthält, und unterdrückt man in einem dieser beiden Stücke eine Scheidewand, z. B. im rechten die Scheidewand BCE zwischen den beiden dieses

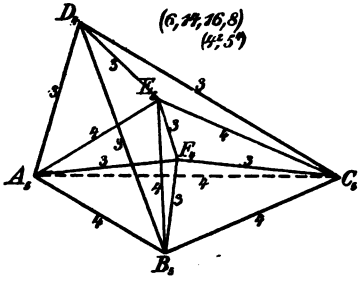


Fig. 14.

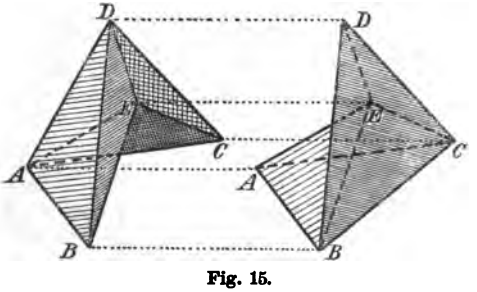


Fig. 15.

Stück bildenden Vierflachen, so kann man innerhalb dieses nicht-konvexen Körpers immer einen sechsten Punkt F derart annehmen, daß die Verbindungen AF, BF, CF, DF, EF alle im Innern dieses Körpers verlaufen und die sechs Vierflache $ABCF$, $ABEF$, $ACEF$, $BCDF$, $BDEF$, $CDEF$ mit gemeinschaftlicher Ecke F zusammen diesen nicht-konvexen Körper ausfüllen. So entsteht dann (Fig. 16) ein Polytop mit sechs Ecken, für welches alle $(6)_2 = 15$ Verbindungen der Ecken zu je zwei Kanten sind und dennoch unter den $(6)_3 = 20$ Verbindungen der Ecken zu je drei BCE und nun auch ADF als Seitenflächen, unter den $(6)_4 = 15$ Verbindungen der Ecken zu je vier die drei auf BCE und die drei auf ADF stehenden Tetraeder als Grenzräume fehlen. Im R_4 ist ein Sechseck im allgemeinen also noch kein vollständiges Sechseck, wenn die $(6)_2$ Verbindungen seiner Ecken zu je zwei alle Kanten sind.

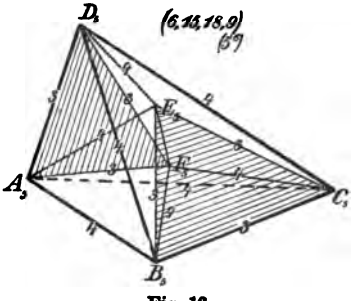


Fig. 16.

Aufgabe 17. Gibt es dann im R_4 auch ein Polytop mit sechs Grenzräumen, welches kein vollständiger Sechsraum ist, obgleich die 15 Schnittebenen der sechs Grenzräume Seitenflächen sind?

[Man betrachte das Diagramm Fig. 13.]

11. Steigerung der Eckenzahl eines Simplexpolytopes. Dual entgegengesetztes Problem. Die in der vorhergehenden Nummer gegebene einfache Lösung des bei der Ableitung des Diagrammes (Fig. 16) des Polytopes (6, 15, 18, 9) angeführten scheinbaren Widerspruchs ist der Schrift M. Brückners *Elemente der vierdimensionalen Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der Polytope* (Zwickau, R. Zückler, 1894) entnommen worden. Indem hier zunächst bewiesen ist, daß es mit Rücksicht auf Isomorphismus zwei verschiedene allgemeine Sechszelle (8, 16, 14, 6) und (9, 18, 15, 6) gibt und es

deshalb auch zwei verschiedene Tetraederpolytope (6, 14, 16, 8) und (6, 15, 18, 9) geben muß, werden in dem erwähnten wertvollen Büchlein Brückners mittels besonderer Fälle einer allgemeinen Diagrammkonstruktion aus dem Simplex $S(5)$ vom R_4 die zwei Tetraedersechsecke und aus diesen die überhaupt möglichen Tetraedersiebenecke abgeleitet. Bei dieser allgemeinen Konstruktion denkt man sich im Diagramme eine Kante AB, um welche herum ein Ring von p Tetraedern derart liegt, daß jedes mit dem vorhergehenden und folgenden ein auf AB stehendes Dreieck gemein hat. Unterdrückt man von q aufeinander folgenden dieser p Tetraeder die $q-1$ Zwischenwände, so begrenzen die von den q Tetraedern übrig bleibenden Dreiecke ein Trigonalpolyeder mit dem Symbole $(q+3,\ 3q+3,\ 2q+2)$. Nimmt man nun innerhalb dieses Polyeders einen neuen Eckpunkt P derart an, daß die P mit allen Ecken des Polyeders verbindenden Geradensegmente innerhalb des Polyeders verlaufen, so kann man den aus q Tetraedern bestehenden Teil des Diagrammes in $2q+2$ auf den Seitenflächen des Polyeders stehenden Tetraeder mit gemeinschaftlicher Ecke P zerlegen. Hierdurch geht dann das ursprüngliche Polytop (e, k, f, r) mit e Ecken, k Kanten, f Flächen und r Räumen in ein Polytop (e', k', f', r') mit $e' = e+1$ Ecken, $k' = k+q+3$ Kanten, $f' = f-(q-1)+3q+3 = f+2q+4$ Flächen und $r' = r-q+2q+2 = r+q+2$ Räumen über. Von dieser allgemeinen Konstruktion sind oben die Fälle $q=1$ und $q=2$ benutzt worden. Und bei der Ableitung aller vierdimensionalen Tetraederpolytope mit sieben Eckpunkten hat man weiter den Fall $q=3$ noch anzuwenden. Auf diese Ableitung der fünf überhaupt möglichen vierdimensionalen Siebenecke

$(7, 18, 22, 11)$ $(4^2, 5^2, 6_2^2)$	$(7, 19, 24, 12)$ $(4, 5^2, 6_2^4)$	$(7, 19, 24, 12)$ $(5^4, 6_1^2)$	$(7, 20, 26, 13)$ $(5^2, 6_1, 6_2^4)$	$(7, 21, 28, 14)$ (6_2^7)

und der ihnen polar-reziproken Siebenzelle, welche sich in extenso bei Brückner vorfindet, gehen wir aber hier nicht ein; wir bemerken nur, daß 6_1 und 6_2 in obiger kleinen Tabelle der Reihe nach den beiden Sechsflachen $(8, 12, 6)_{4^6}$ und $(8, 12, 6)_{3^2, 4^2, 5^2}$ der Fig. 7 und 8 entsprechen.

12. Pyramiden und Prismen. Werden alle Punkte P eines konvexen Polytopes $(Po)_k$ durch Geradensegmente OP

mit einem außerhalb seines Raumes R_k liegenden Punkte O verbunden, so ist der Ort (OP) dieser Geradensegmente OP ein Stück des Raumes $R_{k+1} = (R_k, O)$, welches einerseits vom $(Po)_k$ und andererseits vom Orte (OQ) der die Punkte Q der Begrenzung des $(Po)_k$ mit O verbindenden Geradensegmente OQ eingeschlossen wird. Dieser Raumteil heißt eine *Pyramide* und von dieser Pyramide ist O der *Scheitel*, $(Po)_k$ die *Basis* und der übrige Teil der Begrenzung der *Mantel*.

Aufgabe 18. Zeige, daß die polar-reziproke Figur einer n-dimensionalen Pyramide im R_n wieder eine n-dimensionale Pyramide ist.

Es leuchtet unmittelbar ein, daß eine n-dimensionale, vom Simplex $S(n+1)$ ihres Raumes verschiedene Pyramide weder ein allgemeines noch ein Simplexpolytop sein kann; denn es schließen diese Voraussetzungen der Reihe nach die Bedingungen ein, daß die Basis $(Po)_{n-1}$ nur n Ecken und nur n begrenzende Simplexe $S(n)$ besitze, und jede dieser beiden Bedingungen sagt aus, daß $(Po)_{n-1}$ ein Simplex sein muß. Also bleibt nur die Frage übrig, ob eine Pyramide autopolar, ja sogar polar-reziprok zu sich selbst sein kann. Zur Beantwortung dieser Frage braucht man die Zahl der Ecken, Kanten, Flächen, usw. der Pyramide. Ist nun r_p die Zahl der Grenzräume R_p der Basis $(Po)_{n-1}$ und r'_p diejenige der Grenzräume R_p der ganzen Pyramide, so hat man die n Beziehungen

$$r'_0 = r_0 + 1, \quad r'_1 = r_1 + r_0, \quad \ldots, \quad r'_p = r_p + r_{p-1}, \quad \ldots,$$
$$r'_{n-2} = r_{n-2} + r_{n-3}, \quad r'_{n-1} = 1 + r_{n-2}.$$

Also gehen die Bedingungen $r'_0 = r'_{n-1}$, $r'_1 = r'_{n-2}$, usw., unter welchen die Autopolarität der Pyramide nur möglich ist, in die Bedingungen $r_0 = r_{n-2}$, $r_1 = r_{n-3}$, usw. über; d. h. es kann nur dann von Autopolarität einer Pyramide die Rede sein, wenn die Basis der Pyramide in bezug auf die Zahlen der Ecken, Kanten, Flächen, usw. einen autopolaren Charakter zeigt.

Aufgabe 19. Weise nach, daß eine Pyramide und ihre Basis sich mit Hinsicht auf Autopolarität und Polar-reziprozität gleich verhalten.

Es kann der Prozeß der Pyramidenbildung einige Male nacheinander angewandt werden. Ist z. B. ein ebenes Viereck $ABCD$ (Fig. 17) und außerhalb der Ebene ε dieses Vierecks ein Punkt O_1, außerhalb des durch ε und O_1 bestimmten Raumes ein Punkt O_2 gegeben, so kann man zunächst das Viereck $ABCD$ und O_1 als Basis und Scheitel einer dreidimensionalen Pyramide $(Py)_3$ und nachher diesen Körper $(Py)_3$ und O_2 als Basis und Scheitel einer vierdimensionalen Pyramide $(Py)_4$ betrachten. Und dabei ist dann die Reihenfolge, in welcher die Punkte O_1, O_2 gebraucht werden, gleichgültig; denn es ist die erzeugte $(Py)_4$ in beiden Fällen der Ort der Dreiecke $O_1 O_2 P$, wo für P nacheinander alle Punkte des Vierecks $ABCD$ zu setzen sind. Es möge das so erhaltene Polytop, welches auch der Ort ist der Geradensegmente OP, welche irgend einen Punkt O der Strecke $O_1 O_2$ mit irgend einem Punkte P des Vierecks $ABCD$ verbinden, eine „Pyramide zweiter Stufe" heißen. Allgemeiner: ist $(Po)_k$ irgend ein Polytop eines Raumes R_k und $S(s)$ ein Simplex irgend eines ganz außerhalb R_k liegenden Raumes R_{s-1}, so wird der Ort der Geradensegmente OP, welche irgend einen innerhalb $S(s)$ liegenden Punkt O mit irgend einem innerhalb $(Po)_k$ liegenden Punkt P verbinden, eine „Pyramide s-ter Stufe $(k+s)$-ter Dimension" genannt; dieses im Raume $R_{k+s} = (R_k, R_{s-1})$ liegende Polytop möge durch das Symbol $Py[(Po)_k, S(s)]$ angedeutet werden.

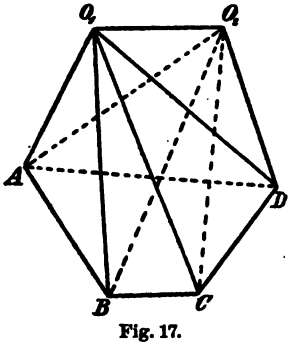


Fig. 17.

Aufgabe 20. Beweise, daß eine Pyramide $(n-1)$-ter Stufe im R_n ein Simplex ist.

Aufgabe 21. Zeige, daß die polar-reziproke Figur einer Pyramide s-ter Stufe n-ter Dimension wieder eine Pyramide s-ter Stufe n-ter Dimension ist.

Auch eine n-dimensionale, vom Simplex $S(n+1)$ ihres Raumes verschiedene Pyramide höherer Stufe $Py[(Po)_{n-s} S(s)]$ kann weder ein allgemeines noch ein Simplexpolytop sein. Und zur Beantwortung der Frage nach der Autopolarität

müssen wieder die Zahlen von Ecken, Kanten, Flächen, usw. bestimmt werden. In der oben angegebenen Bezeichnungsweise hat man offenbar die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
r_0' &= r_0 + (s)_1,\\
r_1' &= r_1 + r_0(s)_1 + (s)_2,\\
r_2' &= r_2 + r_1(s)_1 + r_2(s)_2 + (s)_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
r_{n-3}' &= r_{n-s}(s)_{s-3} + r_{n-s-1}(s)_{s-2} + r_{n-s-2}(s)_{s-1} + r_{n-s-3}(s)_s,\\
r_{n-2}' &= r_{n-s}(s)_{s-2} + r_{n-s-1}(s)_{s-1} + r_{n-s-2}(s)_s,\\
r_{n-1}' &= r_{n-s}(s)_{s-1} + r_{n-s-1}(s)_s,
\end{aligned}
$$

wo $r_{n-s} = 1$ ist und für $(s)_{s-3}$, $(s)_{s-2}$, $(s)_{s-1}$, $(s)_s$ natürlich auch $(s)_3$, $(s)_2$, $(s)_1$ $(s)_0$ geschrieben werden kann. Also führt das Gleichungssystem $r_0 = r_{n-s-1}$, $r_1 = r_{n-s-2}$, usw. zum Gleichungssysteme $r_0' = r_{n-1}'$, $r_1' = r_{n-2}'$, usw.; d. h. es kann nur von Autopolarität der Pyramide höherer Stufe die Rede sein, wenn ihre Basis in den Zahlen der Ecken, Kanten, usw. die Merkmale dieser Verwandtschaft zeigt.

Beschreiben alle Punkte P eines konvexen Polytopes $(Po)_k$ des Raumes R_k mit Inbegriff der Punkte Q der Begrenzung dieses Polytopes in irgend einem durch R_k gehenden Raume R_{k+1} equipollente Strecken PP' und QQ', so ist der Ort der Punkte P' ein zu $(Po)_k$ kongruentes und ähnlich liegendes Polytop $(Po)_k'$, dessen im R_{k+1} liegender Raum R_k' zu R_k parallel und dessen Begrenzung der Ort $(Q)'$ der Punkte Q' ist. Außerdem ist der Ort (PP') der Geradensegmente PP' ein Stück des Raumes R_{k+1}, welches einerseits von den beiden Polytopen $(Po)_k$, $(Po)_k'$ und andererseits vom Orte (QQ') der Geradensegmente QQ' eingeschlossen wird. Dieser vom Orte (PP') eingenommene Teil des Raumes R_{k+1} heißt ein *Prisma* und von diesem Prisma heißen die beiden Polytope $(Po)_k$ und $(Po)_k'$ *Grund-* und *Deckpolytop* oder kurzweg die *Grundpolytope*, während das übrige der Begrenzung der *Mantel* genannt wird. Und das Prisma ist ein *gerades* oder ein *schiefes* Prisma, je nachdem die equipollenten Strecken PP', QQ' zu den Räumen R_k, R_k' der Grundpolytope senkrecht sind oder nicht.

Das n-dimensionale Prisma des Raumes R_n kann offenbar niemals ein Simplexpolytop sein; denn bei ersterem treten viereckige Seitenflächen auf. Es ist dann und nur dann ein

allgemeines Polytop, wenn die Grundpolytope allgemeine Polytope sind. Und die polar-reziproke Figur des Prismas entsteht durch die Zusammenfügung zweier n-dimensionaler Pyramiden mit gemeinschaftlicher Basis.

Aufgabe 22. Was entspricht beim Prisma dem Raume R_{n-1} dieser gemeinschaftlichen Basis der „Doppelpyramide"?

[Der allen equipollenten Strecken PP' gemeinschaftliche uneigentliche Punkt.]

Aufgabe 23. Beweise, daß die erwähnte Zusammenfügung auch wohl eine Subtraktion sein kann.

Die Zahlen der Ecken, Kanten, usw. des Prismas werden leicht ermittelt. In der für die Pyramide verwendeten Bezeichnungsweise hat man die n Beziehungen

$$r'_0 = 2r, \quad r'_1 = 2r_1 + r_0, \quad \ldots, \quad r'_p = 2r_p + r'_{p-1}, \quad \ldots,$$
$$r'_{n-2} = 2r_{n-2} + r_{n-3}, \quad r'_{n-1} = 2 + r_{n-2}.$$

Es kann der Prozeß der Prismenbildung wieder einige Male nacheinander angewandt werden. Ist z. B. ein ebenes Viereck $ABCD$ (Fig. 18) und außerhalb der Ebene ε dieses Vierecks ein Punkt A', außerhalb des durch ε und A' bestimmten Raumes ein Punkt A'' gegeben, so kann man zunächst jeden Punkt P innerhalb $ABCD$ eine zu AA' equipollente Strecke und nachher jeden Punkt Q innerhalb des so erzeugten dreidimensionalen Prismas eine zu $A'A''$ equipollente Strecke beschreiben lassen. Dabei ist dann wieder die Reihenfolge, in welcher die Punkte A', A'' benutzt werden, irrelevant; denn es ist das erzeugte vierdimensionale Prisma in beiden Fällen der Ort der von den Punkten P des Vierecks $ABCD$ beschriebenen zu $AA'A''A'''$ equipollenten Parallelogramme. Von diesem speziellen Falle eines vierdimensionalen Prismas zweiter Stufe steigt man

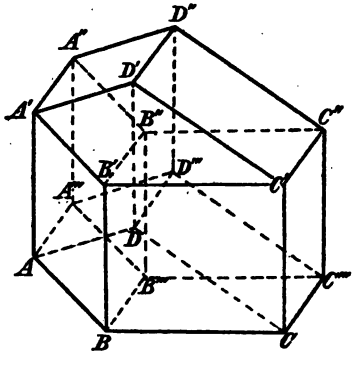


Fig. 18.

leicht zum allgemeinen Falle eines $(k+s)$-dimensionalen Prismas s-ter Stufe empor, indem man von einem k-dimensionalen Polytope $(Fo)_k$ ausgeht und auf dieses s-mal nacheinander mit Hilfe von s in jedesmal neuen Richtungen verlaufenden Strecken den Prozeß der Prismenbildung anwendet. Es fragt sich was dabei im ganzen aus irgend einem Punkte P innerhalb $(Po)_k$ hervorgeht. Zuerst beschreibt dieser Punkt eine Strecke, dann diese Strecke ein Parallelogramm, darauf dieses Parallelogramm ein Parallelepiped, usw., was schließlich zu einem s-dimensionalen Polytope führt, welches *Parallelotop* heißen und durch das Symbol $(Pa)_s$ angedeutet werden mag. Wie das Parallelogramm begrenzt wird durch zwei Paare equipollenter Strecken und das Parallelepiped durch drei Paare equipollenter Parallelogramme, so wird das Parallelotop mit s Dimensionen von s Paaren equipollenter Parallelotopen mit $s-1$ Dimensionen eingeschlossen; d. h. in Verbindung mit der Gleichgültigkeit der Reihenfolge, in welcher die s verschiedenen Strecken genommen werden, ist das s-dimensionale Parallelotop auf s unter sich verschiedene Arten als ein Prisma zu betrachten, wobei dann jedes der s Paare equipollenter $(s-1)$-dimensionaler Grenzparallelotope einmal als Grundpolytopenpaar auftritt.

Wird durch das Symbol $RV(s)$ das System der s gerichteten Strecken angedeutet, welches oben mit $(Po)_k$ das $k+s$-dimensionale Prisma s-ter Stufe bestimmte, so kann dieses Prisma selbst durch das Symbol $Pr[(Po)_k, RV(s)]$ bezeichnet werden. Die Zahlen von Ecken, Kanten, usw. dieses Prismas werden aus denen des ursprünglichen Polytopes $(Po)_k$ abgeleitet mit Hilfe der Gleichungen

$$
\begin{aligned}
r'_0 &= 2^s r_0,\\
r'_1 &= 2^s r_1 + 2^{s-1} r_0 (s)_1,\\
r'_2 &= 2^s r_2 + 2^{s-1} r_1 (s)_1 + 2^{s-2} r_0 (s)_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
r'_{n-3} &= 2^3 r_{n-s} (s)_{s-3} + 2^2 r_{n-s-1} (s)_{s-2} + 2 r_{n-s-2} (s)_{s-1} + r_{n-s-3} (s)_s,\\
r'_{n-2} &= 2^2 r_{n-s} (s)_{s-2} + 2\, r_{n-s-1} (s)_{s-1} + r_{n-s-2} (s)_s,\\
r'_{n-1} &= 2\, r_{n-s} (s)_{s-1} + r_{n-s-1} (s)_s,
\end{aligned}
$$

wo für $k+s$ wieder n geschrieben ist, r_{n-s} wieder die Einheit ist und $(s)_{s-3}$, $(s)_{s-2}$, $(s)_{s-1}$, $(s)_s$ durch $(s)_3$, $(s)_2$, s, 1 zu ersetzen sind. Im speziellen Falle, wo $(Po)_k = (Po)_{n-s}$

eine Strecke, also $k = 1$, $s = n - 1$, $r_0 = 2$, $r_1 = 1$ ist, ergibt sich für das n-dimensionale Parallelotop das Gleichungssystem

$$r'_0 = 2^n, \quad r'_1 = 2^{n-1}(n)_1, \quad r'_2 = 2^{n-2}(n)_2, \ \ldots,$$
$$r'_{n-2} = 2^2(n)_{n-2}, \quad r'_{n-1} = 2(n)_{n-1}.$$

Aufgabe 24. Bestimme die Zahl der Diagonalen verschiedener Gattung eines n-dimensionalen Parallelotopes.

18. Andere Polytope speziellen Charakters. Zum Schlusse dieses Paragraphen erwähnen wir kurz noch einige andere Polytope speziellen Charakters als Zwischenformen zwischen Pyramide und Prisma, Pyramidenstümpfe, Prismenstümpfe, Hufe, Prismoide, usw.

Wendet man die Prozesse der Pyramiden- und der Prismenbildung nacheinander auf das nämliche Polytop an, so ändert sich das Endergebnis mit der Reihenfolge dieser Operationen. Betrachtet man das Viereck $ABCD$ (Fig. 19) zunächst als Grundfläche einer Pyramide mit dem Scheitel E

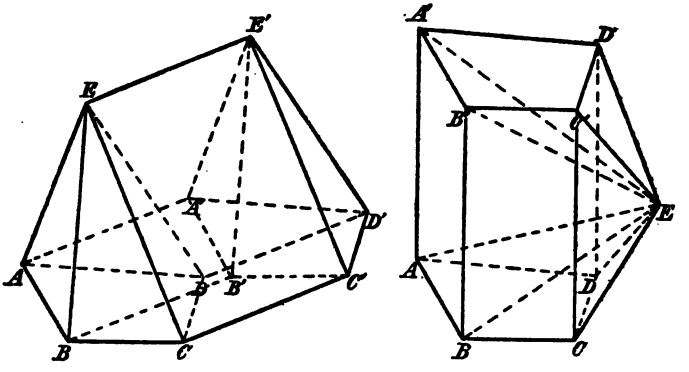


Fig. 19.

und erzeugt nachher ein vierdimensionales Prisma mit dieser Pyramide als einem der Grundpolytope und zu EE' equipollenten Mantelkanten, so ist das Resultat keine Pyramide; läßt man hingegen das Viereck $ABCD$ ein dreidimensionales

Prisma ($ABCD$, $A'B'C'D'$) erzeugen und betrachtet dieses Prisma als Basis einer vierdimensionalen Pyramide mit dem Scheitel E, so ist das Resultat kein Prisma. Natürlich kann man das erste Polytop ein pyramidales Prisma, das zweite eine prismatische Pyramide nennen.

Wird eine n-dimensionale Pyramide durch einen Raum R_{n-1} geschnitten, so hat man zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Schnittraum nur die Verlängerung des Raumes R_{n-1} der Basis oder diese Basis selbst schneidet. Im ersten Falle ist das auf der Seite des Scheitels liegende Stück an sich wieder eine n-dimensionale Pyramide und das andere Stück ein *Pyramidenstumpf*, welcher in den kennzeichnenden Zahlen der Ecken, Kanten, usw. einem über der nämlichen Basis stehenden Prisma ähnlich ist. Wirklich führt eine kollineare Verwandtschaft (I 99), welche den Pyramidenscheitel sowie den Schnitt R_{n-2} der zwei nicht zueinander parallelen „Grundräume" des Stumpfes ins Unendliche wirft, den Stumpf in ein Prisma über. Im zweiten Falle, wo der Schnittraum R_{n-1} die Basis selbst schneidet, gehört das den Scheitel nicht enthaltende Stück zu einer besonderen Gattung der allgemeinen Gruppe der *Hufe*, unter Huf im R_n ein Polytop verstanden, welches entsteht, wenn zwei $(n-1)$-dimensionale isomorphe Polytope den Schnittraum R_{n-2} ihrer Räume R_{n-1} zu einem gemeinschaftlichen sich selbst entsprechenden Seitenraume und in diesem alle Ecken, Kanten, ..., Seitenräume R_{n-3} entsprechend gemein haben, und wenn außerdem die übrigen einander entsprechenden Ecken, Kanten, ..., Seitenräume R_{n-2} dieser beiden $(n-1)$-dimensionalen Polytope der Reihe nach durch Kanten, Flächen, .., Seitenräume R_{n-1} miteinander verbunden sind. Und das eigentümliche des bei diesem Schnitte der Pyramide entstehenden Hufes, welcher *Pyramidenkeil* heißen mag, liegt dann hierin, daß alle die einander entsprechenden Ecken, Kanten, ... verbindenden Kanten, Flächen, ... bei Verlängerung durch den nämlichen Punkt, den Scheitel der Pyramide, hindurchgehen.

Zur Übung mögen die verschiedenen Formen der beiden Stücke entwickelt werden, in welche eine fünfdimensionale Pyramide mit einem der beiden allgemeinen Sechszelle [10] zur Basis bei der Durchschneidung durch einen auch diese Basis treffenden vierdimensionalen Raum R_4 zerfällt. Dazu

versinnliche in der normalen Projektion (Fig. 20) der Pyramide und des Schnittraumes R_4 auf eine zum dreidimensionalen Durchschnitte von Basis und Schnittraume R_4 normale Ebene O den Scheitel, a das „Scheitelstück“ und b oder c den Huf, je nachdem β Schnittraum und γ Basis oder umgekehrt γ Schnittraum und β Basis ist. Dabei hat man dann weiter nur zu bedenken, daß die in der Basis liegenden Teile T_p, T_q des Sechszelles, welche im Polyeder r aneinander stoßen, der mittlere und einer der beiden äußeren Teile eines von zwei Räumen R_4 in drei Teile zerlegten Fünfzelles — oder von drei auffolgenden Teilen eines von zwei Räumen R_4 in vier Teile zerlegten Fünfzelles — sind, um einzusehen, daß es sich handelt um die Betrachtung der zehn Fälle:

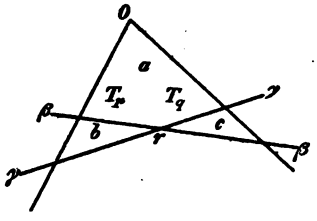


Fig. 20.

Rang-nummer	Basis	Ecken des $S(5)$			T_p	T_q	r
		außerhalb T_p und T_q	in T_p	in T_q			
1	(8, 16, 14, 6)	3	0	2	(12, 24, 19, 7, 1)	(8, 16, 14, 6, 1)	(6, 9, 5, 1)
2		3	1	1	(11, 22, 18, 7, 1)	(5, 10, 10, 5, 1)	(4, 6, 4, 1)
3		1	0	4	(8, 16, 14, 6, 1)	(8, 16, 14, 6, 1)	(4, 6, 4, 1)
4		1	1	3	(11, 22, 18, 7, 1)	(9, 18, 15, 6, 1)	(6, 9, 5, 1)
5		1	2	2	(12, 24, 19, 7, 1)	(8, 16, 14, 6, 1)	(6, 9, 5, 1)
6		1	3	1	(11, 22, 18, 7, 1)	(5, 10, 10, 5, 1)	(4, 6, 4, 1)
7	(9, 18, 15, 6)	2	0	3	(12, 24, 19, 7, 1)	(9, 18, 15, 6, 1)	(6, 9, 5, 1)
8		2	0	3	(11, 22, 18, 7, 1)	(14, 28, 21, 7, 1)	(8, 12, 6, 1)
9		2	1	2	(13, 26, 20, 7, 1)	(8, 16, 14, 6, 1)	(6, 9, 5, 1)
10		2	2	1	(12, 24, 19, 7, 1)	(5, 10, 10, 5, 1)	(4, 6, 4, 1)

Man findet fünf verschiedene Scheitelstücke a und sieben verschiedene Keile b oder c nach dem Schema:

	a		*b*	*c*
		(6, 15, 20, 15, 6)		2, 6, 10
(13, 34, 40, 25, 8)	2, 3, 6	(10, 25, 30, 20, 7)		1, 5, 9
(14, 37, 43, 26, 8)	10	(12, 30, 34, 21, 7)	3	3, 4, 7
(15, 39, 44, 26, 8)	1, 4, 5	(14, 35, 40, 25, 8)	8	
(16, 42, 47, 27, 8)	7, 9	(16, 40, 44, 26, 8)	4	
(18, 47, 51, 28, 8)	8	(18, 45, 48, 27, 8)	1, 2, 5, 6, 7	
		(20, 50, 52, 28, 8)	9, 10	8

in welchem bei jedem der zwölf Polytope der in den Rangnummern der vorhergehenden Tabelle und den Buchstaben a, b, c der Fig. 20 angewiesene Fundort erwähnt ist. Die Ableitung dieser Resultate wird genugsam erklärt durch Nebeneinanderstellung folgender bei (a) 1 und (b) 1 auszuführenden Additionen,

(	6,	15,	14,	6,	1)	(	6,	15,	14,	6, 1)
(	2,	7,	9,	5,	1)	(	6,	15,	14,	6, 1)
(	6,	9,	5,	1,	)	(	6,	9,	5,	1,)
(	1,	8,	16,	14,	6)	(		6,	15,	14, 6)
(15,	39,	44,	26,	8)		(18,	45,	48,	27,	8)

wenn noch bemerkt wird, daß die Einheit in der vierten Zeile links vom Scheitel herrührt und die Quadrupel von vier Summanden sich auf übersichtliche Weise aus $T_p - r$, $T_q - r$ (oder $T'_p - r$), r und der Basis (oder dem Basisstücke) bilden.

Bei der Durchschneidung des Prismas hat man der Reihe nach die Fälle zu betrachten, wo der Schnittraum keines oder eines der beiden Grundpolytope oder aber beide Grundpolytope schneidet. Im ersten Falle sind die beiden Teile *Prismenstümpfe*, welche dem ursprünglichen Prisma isomorph sind. Im zweiten Falle nennen wir das größere Stück ein *gebrochenes Prisma* und ist das andere ein besonderer Huf, welcher *scharfer Prismenkeil* heißen mag. Und im dritten Falle können die beiden Teile als *stumpfe Prismenkeile* bezeichnet werden, unter ganz besonderen Umständen jedoch selbst wieder Prismen sein. Die im zweiten Falle bei sechszelligen Grundpolytopen auftretenden Schnittpolytope werden aus den oben bei den Pyramiden erhaltenen Resultaten abgeleitet. Während nämlich die sieben dort gefundenen

Hufe ungeändert bleiben, abgesehen von der unbedeutenden Tatsache, daß die vom Mantel herrührenden Kanten bei Verlängerung in einem uneigentlichen Punkte zusammentreffen, so gehen die fünf Scheitelstücke durch Ersetzung des Zahlenquintupels (1, 0, 0, 0, 0) des Scheitels durch dasjenige der Grundpolytope, d. h. durch (8, 16, 14, 6, 1) oder (9, 18, 15, 6, 1) in die vier Teile über, welche sich durch die allgemeine Formel

$$(20 + 2t,\ 50 + 5t,\ 54 + 4t,\ 31 + t,\ 9),$$
$$(t = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

umfassen lassen. Und über den dritten Fall, der bei weitem der schwierigste ist, wird man am Schlusse dieser Nummer eine Bemerkung finden.

Unter n-dimensionales *Prismoid* versteht man ein Polytop begrenzt von zwei in parallelen Räumen R_{n-1} liegenden Polytopen und einem Mantel von Simplexen $S(n)$, welche sich teilweise zu Mantelpolytopen vereinigen können; im allgemeinen sind die beiden Grundpolytope $(n-1)$-dimensional.

Schließlich sei noch einer besonders merkwürdigen Gruppe von Polytopen Erwähnung getan, welche sich als eine andere Verallgemeinerung des einfachsten Prismas deuten lassen. Es ist das dreiseitige dreidimensionale Prisma mit dem Dreiecke AOB als Basis und OC als aufstehender Kante sowohl der Ort des sich parallel zu sich selbst bewegenden Dreiecks AOB, dessen Eckpunkt O das Segment OC beschreibt, wie der Ort des sich parallel zu sich selbst bewegenden Segmentes OC, dessen Eckpunkt O der Reihe nach mit allen Punkten des Dreiecks AOB zusammenfällt. Ersetzt man nun das Simplex $O(ABC)$ des dreidimensionalen Raumes durch das Simplex $O(A_1A_2 \ldots A_n)$ des Raumes R_n, so kann man aus diesem $S(n+1)$ zwei Simplexe $O(A_1A_2 \ldots A_p)$ und $O(A_{p+1}A_{p+2} \ldots A_n)$ mit gemeinschaftlichem Eckpunkte O bilden, (deren Räume R_p und R_{n-p} dann nur den Punkt O gemein haben können, weil sie zusammen R_n bestimmen), um nun weiter das Polytop zu betrachten, welches erzeugt wird, wenn das Simplex $S(p+1)$ mit den Ecken O, A_1, A_2, …, A_p sich im R_n derart parallel zu sich selbst bewegt, daß O nach und nach mit allen Punkten des Simplex $S(n-p+1)$ mit den Ecken O, A_{p+1}, A_{p+2}, …, A_n

zusammenfällt. Das so erzeugte Polytop möge, weil es in einfacher Weise mit dem Simplex $S(n+1)$ zusammenhängt, ein *Simplotop* heißen und durch das Symbol $S_i(p, n-p)$ angedeutet werden. Die kennzeichnenden Zahlen der Ecken, Kanten, Flächen, usw. des $S_i(p, q)$ im R_{p+q} werden unmittelbar aus dem selbstverständlichen Schema

R_0	R_1	R_2	...
$(p+1)_1(q+1)_1$	$(p+1)_1(q+1)_2$ $+(p+1)_2(q+1)_1$	$(p+1)_1(q+1)_3$ $+(p+1)_2(q+1)_2$ $+(p+1)_3(q+1)_1$	...

abgelesen. Deshalb erhält man, in Verbindung mit einer schon früher [6] benutzten Identität für die Zahl der Grenzräume R_k des $S_i(p, q)$ den Ausdruck

$$(4) \qquad (p+q+2)_{k+2} - (p+1)_{k+2} - (q+1)_{k+2},$$

d. h. mit Hinsicht auf die Zahlen der Grenzelemente ist — vergleiche den Ausdruck (3) von Nr. 6 — das $S_i(p, q)$ als ein Schnittteil $(p+1, q)$ des Simplex $S(p+q+1)$ und deshalb — vergleiche die Beziehung (2) der Nr. 6 — auch als Schnitt $(p+1, q+1)_0$ des Simplex $S(p+q+2)$ zu betrachten. Wirklich wird leicht bewiesen, daß das Simplotop $S_i(p, q)$ nicht nur mit einem $(p+1, q)$ isomorph, sondern sogar selbst ein solches Simplexstück ist. Ist A_r^∞ der uneigentliche Punkt der Gerade OA_r, $r=1, 2, \ldots, p+q$, so ist $S_i(p, q)$ nämlich sowohl das auf der Seite vom Punkte O liegende endliche Stück des vom Raume $(A_1^\infty A_2^\infty \ldots A_p^\infty A_{p+1} A_{p+2} \ldots A_{p+q})$ geschnittenen gemischten Simplex $(OA_1A_2 \ldots A_p A_{p+1}^\infty A_{p+2}^\infty \ldots A_{p+q}^\infty)$ wie das auf der Seite von O liegende endliche Stück des vom Raume $(A_1A_2 \ldots A_p A_{p+1}^\infty A_{p+2}^\infty \ldots A_{p+q}^\infty)$ geschnittenen gemischten Simplex $(OA_1^\infty A_2^\infty \ldots A_p^\infty A_{p+1} A_{p+2} \ldots A_{p+q})$, woraus dann wieder die doppelte Erzeugung des $S_i(p, q)$ und ein Teil der Gleichung (2) in der Form $(p+1, q) = (q+1, p)$ hervorgeht. Also gilt der allgemeine Satz:

Die mit den verschiedenen Zerlegungen der Zahl n in zwei Summanden p, q zusammenhängenden Simplotope $S_i(1, n-1)$, $S_i(2, n-2)$, usw. stellen auf ganz übersichtliche Weise die

nach Isomorphismus verschiedenen Typen der von $n+2$ Räumen R_{n-1} begrenzten allgemeinen Polytope des Raumes R_n dar. Die Anzahl dieser Typen ist $\frac{1}{2}n$ für ein gerades n und $\frac{1}{2}(n-1)$ für ein ungerades n.

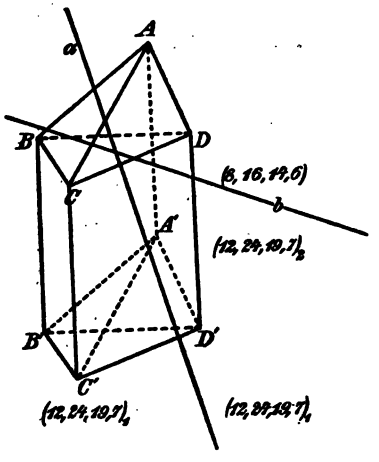


Fig. 21.

Die Abbildung der Polytope, welche von $n+2$ Räumen R_{n-1} begrenzt werden, als Simplotope in ebener Projektion ist sehr geeignet zur bequemen Bestimmung der von $n+3$ Räumen R_{n-1} begrenzten Polytope. So sind in den Fig. 21 und 22 die beiden vierdimensionalen Sechszelle $S_1(2, 4)$, $S_1(3, 3)$ abgebildet und erblickt man beim (8, 16, 14, 6) die Zerlegung in zwei Teile $(12, 24, 19, 7)_1$ durch den Raum a und die Zerlegung in einen Teil (8, 16, 14, 6) und einen Teil $(12, 24, 19, 7)_2$ durch den Raum b, beim

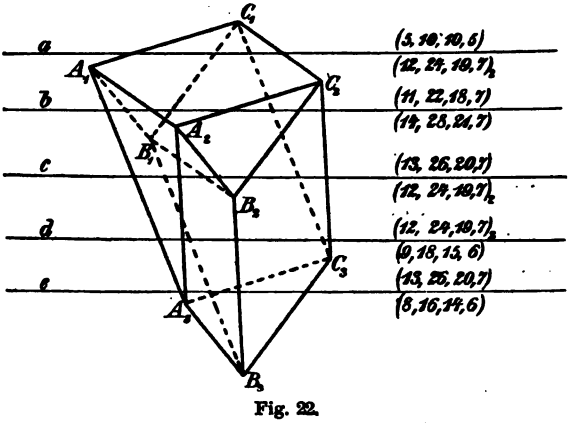


Fig. 22.

(9, 18, 15, 6) die Zerlegung in (5, 10, 10, 5) und $(12, 24, 19, 7)_2$ durch den Raum a, die Zerlegung in

(11, 22, 18, 7) und (14, 28, 21, 7) durch den Raum b, die Zerlegung in (13, 26, 20, 7) und (12, 24, 19, 7)$_2$ durch den Raum c, usw.

Beschränkt man sich beim oben erwähnten dritten Falle des stumpfen Prismenkeils auf das Beispiel, wo die Grundpolytope (Fig. 22) Sechszelle (9, 18, 15, 6) sind, so findet man mittels der zehn Paare paralleler Schnitte (a, b), usw. die zwanzig Schnittteile $(a\,b)$, $(b\,a)$, usw., von welchen $(c\,d)$ das Polytop (18, 45, 48, 27, 8) liefert, während sämtliche andere Resultate sich schreiben lassen in der Sammelform

$$(18 + 2t,\ 45 + 5t,\ 50 + 4t,\ 30 + t,\ 9),$$
$$(t = 0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5).$$

---

§ 2. Der Eulersche Satz.

14. Der Eulersche Satz in unserm Raume. Sind e, k, f respektive die Zahlen der Ecken, Kanten, Flächen eines Polyeders, so gilt im allgemeinen die Beziehung

$$e - k + f = 2. \tag{5}$$

Diese 1752 von Euler gefundene Formel wird jetzt die Eulersche Formel genannt, obgleich sich später ergeben hat, daß sie schon Descartes und möglicherweise sogar Archimedes bekannt war. Sie hat während eines ganzen Jahrhunderts das besondere Interesse der sich mit Polyederuntersuchungen beschäftigenden Mathematiker gefunden und ist im Laufe dieses Zeitraumes mit immer neuen Beweisen versehen und auf ihren Gültigkeitsbereich geprüft worden. Weil es uns um die mehrdimensionale Verallgemeinerung der bekannten Formel zu tun ist, so erscheint es geboten sehr viel Bemerkenswertes dieser Untersuchungen zu umgehen, indem wir den geneigten Leser bitten die schon einmal erwähnte Musterarbeit Brückners nachzuschlagen und in erster Linie die inhaltsreichen „Geschichtliche Bemerkungen“ dieses Buches zu durchlaufen.

Es liegt uns natürlich ob, genau anzugeben, für welche Polyeder der Eulersche Satz nicht gilt; dazu wird sich später bei der Behandlung der Verallgemeinerungen [16] des Satzes die Gelegenheit darbieten.

15. Beweise des Eulerschen Satzes. Man kann vier wesentlich verschiedene Beweisarten unterscheiden, welche respektive als Methode der Körperzerlegung, Methode der Winkelsumme des Vielecks, Methode des Inhalts des sphärischen Vielecks und Methode der Oberflächenzerlegung bezeichnet werden können.

a) *Methode der Körperzerlegung.* Diese Methode der Beweisführung, welche von Euler selbst herrührt, zerfällt naturgemäß in zwei Teile. Zunächst wird gezeigt, daß die Zahl $e - k + f$ ihren Wert ungeändert beibehält, wenn man aus dem gegebenen Polyeder (e, k, f) in bestimmter Weise ein neues Polyeder ableitet, dessen Eckenzahl um die Einheit verringert ist; nachher reichen dann die Bemerkungen, daß eine $e - 4$-fache Anwendung dieses Prozesses zum Vierflach führt und die Zahl $e - k + f$ für dieses einfachste Polytop wirklich den Wert $4 - 6 + 4 = 2$ annimmt, zur Vollendung des Beweises hin. Ist O irgend ein Eckpunkt des gegebenen Polytops (e, k, f), wo μ Kanten $OA, OB, OC, OD, \ldots$ zusammentreffen, und $ABCD \ldots$ ein im allgemeinen unebenes μ-Eck mit den von O verschiedenen Endpunkten dieser Kanten als Ecken, sind weiter $AC, AD, \ldots$ die von irgend einer Ecke A ausgehenden Diagonalen dieses Vielecks, so ersetze man die μ dreieckigen Teile $AOB, BOC, COD, \ldots$ der in O zusammenlaufenden Seitenflächen durch die $\mu - 2$ Dreiecke $BAC, CAD, \ldots$ Man erhält dann im allgemeinen, wenn μ' der Kanten $AB, BC, \ldots$ neu sind, die Begrenzung eines neuen Polytopes (e', k', f'), für welches

$$e' = e - 1, \qquad k' = k + \mu' - 3, \qquad f' = f + \mu' - 2$$

ist. Also ist das neue Polytop, welches um die Pyramide $O(ABCD \ldots)$ mit im allgemeinen gebrochener Basis kleiner ist als das gegebene, mit diesem verknüpft durch die Beziehung

$$e' - k' + f' = e - k + f.$$

b) *Methode der Winkelsumme des Vielecks.* Die zweite Methode, welche unabhängig voneinander von Lhuilier (1812) und Steiner (1826) gefunden worden ist, beruht darauf, daß man die Summe aller Winkel der Vielecke, welche durch Projektion eines Polyeders erhalten werden, leicht auf zweierlei Weise ausdrücken kann. Projiziert man

das gegebene Polyeder (e, k, f) aus einem willkürlich gewählten uneigentlichen Punkte auf irgend eine diesen Punkt nicht enthaltende Ebene, so erhält man (Fig. 23) ein von den Vielecksprojektionen doppelt überdecktes Polygon $ABC\ldots$ und nun wird die Summe w der Winkel der Vielecksprojektionen erhalten, indem man zunächst entweder alle Winkel des nämlichen Polygons oder aber alle um den nämlichen Eckpunkt herum liegende Winkel zusammennimmt und nachher die so erhaltenen Partialsummen zusammenfügt. Sind nun $n_1, n_2, \ldots, n_f$ die Seitenzahlen der f Seitenflächen, so ist, den gestreckten Winkel als Einheit angenommen,

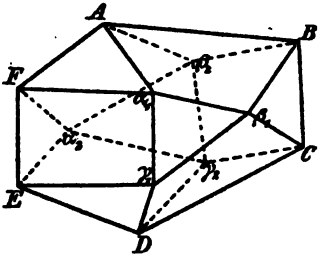


Fig. 23.

$$w = \sum_{i=1}^{f} (n_i - 2) = 2\,(k - f);$$

denn es wird jede der k Kanten doppelt erhalten, wenn man die Seiten aller begrenzenden Vielecke zusammenfügt. Und bestehen nun weiter die Projektionen der e Ecken aus e_r Randpunkten $A, B, C\ldots$ und e_i Punkten $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_2, \beta_2, \ldots$ im Innern, so hat man andererseits

$$w = 2(e_r - 2) + 2e_i = 2(e - 2),$$

worauf durch Gleichstellung der beiden für w gefundenen Werte das verlangte Resultat erscheint.

c) *Methode des Inhalts des sphärischen Vielecks.* Die dritte von Legendre (1809) herrührende Methode beruht auf der Tatsache, daß der Inhalt eines sphärischen Vielecks sich mittels Winkelsumme und Seitenzahl in der Kugeloberfläche ausdrücken läßt. Zerlegt man das sphärische Vieleck durch die sphärischen Diagonalen aus einer Ecke in sphärische Dreiecke und schreibt für jedes dieser Dreiecke die bekannte Inhaltsformel hin, so gibt die Addition sofort den Ausdruck $\frac{w - n + 2}{4} O$, wo w die Winkelsumme in gestreckten Winkeln, n die Seitenzahl und O die Oberfläche

der Kugel bedeutet. Projiziert man nun die Ecken, Kanten und Flächen eines Polyeders aus irgend einem im Innern dieses Körpers liegenden Punkt C auf eine Kugelfläche mit C als Mittelpunkt, so ist die Summe der Projektionen aller Seitenflächen offenbar die ganze Oberfläche; also ist

$$\sum_{i=1}^{f} \frac{w_i - n_i + 2}{4} O = O$$

und hieraus geht mit Hilfe der Gleichungen

$$\Sigma w_i = 2e, \quad \Sigma n_i = 2k$$

unmittelbar der Eulersche Satz hervor.

d) *Methode der Oberflächenzerlegung.* Bei dieser von Cauchy herrührenden Methode setzt man voraus, daß man die Seitenflächen des Polyeders die eine nach der andern entfernt, und bei jedem Schritte dieser Oberflächenzergliederung die Änderung untersucht, welche der Ausdruck $e - k + f$ des übrig gebliebenen Teiles erlitten hat. Es ergibt sich dann:

α) daß dieser Wert s anfangs, d. h. durch Entfernung der ersten Seitenfläche, um die Einheit kleiner wird;

β) daß der neue Wert $s - 1$ sich bei Entfernung der zweiten, dritten, ... und vorletzten Seitenfläche erhält;

γ) daß dieser Wert $s - 1$ im letzten Stadium, wo bloß noch eine Seitenfläche vorliegt, offenbar der Einheit gleich wird, usw.

Von diesen drei Behauptungen bedarf nur noch die mittlere einer näheren Behandlung. Weil man offenbar die Reihenfolge, nach welcher man die verschiedenen Seitenflächen entfernt, immer so wählen kann, daß die übrig bleibende Oberfläche nur eine Öffnung zeigt — oder, wie es in der Sprache der *Analysis Situs* heißt, nur einfach zusammenhängend ist —, so werden jedesmal die p Kanten, mit welchen irgend ein zu entfernendes q-Eck ($q > p$) an das übrig bleibende stößt, ununterbrochen aufeinander folgen. Es verringern sich dann e, k, f bei Entfernung dieser Seitenfläche um $q - p - 1$, $q - p$, 1; deshalb bleibt $e - k + f$ ungeändert.

Natürlich kann die beschriebene Oberflächenzerlegung durch die umgekehrte Operation der Aufbauung ersetzt

werden. Dabei steigert der Ausdruck $e - k + f$, offenbar Null wenn noch keine Seitenfläche vorliegt, seinen Wert zweimal um eins, nämlich beim ersten und beim letzten Schritte.

Zu dieser vierten Gruppe von Methoden rechnet Brückner auch den äußerst sinnreichen Beweis von Staudts (1848), beruhend auf der Betrachtung einer aus $e - 1$ Kanten gebildeten gebrochenen Linie $a\,b\,c\,d\,\ldots$, welche alle Eckpunkte so miteinander verbindet, daß man dieser Linie entlang immer nur auf eine einzige Weise von irgend einem Eckpunkte zu irgend einem andern gelangen kann. Hieraus geht nämlich hervor, daß in dieser ungeschlossenen Kette von Kanten keine geschlossene Linie enthalten ist, dies aber bei Hinzufügung irgend einer der $k - (e - 1)$ übrig bleibenden Kanten sofort eintreten muß, indem diese Kante einen zweiten Verbindungsweg zwischen ihren Endpunkten darbietet. Also kann man noch immer von irgend einer Seitenfläche aus auf jede andere Seitenfläche übergehen, wenn es bei der Bewegung auf der Oberfläche nur erlaubt bleibt, die $k - (e - 1)$ nicht der Kette $a\,b\,c\,d\,\ldots$ angehörenden Kanten zu überschreiten. Nun ist andererseits klar, daß die Zahl der zu dieser Bewegung hinreichenden und erforderlichen überschreitbaren Kanten $f - 1$ beträgt; ordnet man nämlich die Seitenflächen in der Weise an, daß die Schnittlinie zweier aufeinanderfolgenden Flächen eine Kante ist, so erhält man offenbar ein den gestellten Bedingungen Genüge leistendes Kantensystem. Also hat man $k - (e - 1) = f - 1$, usw.

Man kann sich fragen, ob das System des $f - 1$ übrig bleibenden Kanten immer wieder eine ununterbrochene Kette bildet. Die Antwort auf diese Frage muß verneinend lauten, obgleich es Fälle gibt, wo die übrig bleibenden Kanten sogar eine geschlossene Kette bilden.

16. Gültigkeitsbereich des Eulerschen Satzes; verallgemeinerte Formulierungen. Es ist leicht Vielfache vorzuführen, für welche der Eulersche Satz nicht gilt; wie schon 1812 Lhuilier behauptete, sind die Ausnahmen dreierlei Art, nämlich Körper mit Höhlungen, Körper mit Durchbohrungen und Körper mit zwei oder mehrere Vielecke tragenden Seitenflächen.

a) *Körper mit Höhlungen.* Wird um ein Vierflach von Metallblech herum ein Vierflach von Gips gegossen, so bildet

der Gips einen Körper $ABCD$ mit einer Höhlung $EFGH$, und hat die Zahl $e-k+f$, sowohl für die Bekleidung der Höhlung wie für die äußere Oberfläche, den Wert zwei. Also ergibt sich unmittelbar, daß bei diesem Körper (8, 12, 8) die Formel $e-k+f=4$ auftritt. Und ebenso findet man, daß für einen Körper mit p polyederförmigen Höhlungen die Beziehung $e-k+f=2(p+1)$ gilt.

b) *Körper mit Durchbohrungen.* Betrachtet man die Zusammenfügung von zwei Fünfflachen $ABCP_aP_bP_c$ (vergleiche Fig. 4, Seite 14) und $A'B'C'P_aP_bP_c$, welche symmetrisch in bezug auf die gemeinschaftliche Fläche $P_aP_bP_c$ liegen mögen, und nimmt man von diesem Körper (9, 15, 8) das Prisma mit den Endflächen ABC, $A'B'C'$ weg, so erhält man ein durchbohrtes Polyeder (9, 18, 9), für welches der Eulersche Satz also durch die Beziehung $e-k+f=0$ ersetzt werden muß. Und dies ist allgemein der Fall beim Auftreten einer einzigen Durchbohrung, wenn nur die neuen Seitenflächen der Höhlung mit den beiden Endflächen ein dem Eulerschen Satze Genüge leistendes Polyeder einschließen. Ist nämlich das letztere Polyeder ein (e', k', f') und die eine Endfläche ein e_1-Eck, die andre ein e_2-Eck, so werden e, k, f der Reihe nach um $e'-(e_1+e_2)$, $k'-(e_1+e_2)$, $f'-4$ vermehrt und steigert sich deshalb der Wert des Ausdrucks $e-k+f$ um $e'-k'+f'-4$, d. h. es wird diese Größe um zwei kleiner. Da nun jede Durchbohrung den Wert des Ausdruckes $e-k+f$ um zwei Einheiten herabdrückt, so gilt für einen Körper mit q Durchbohrungen die Beziehung $e-k+f=2-2q$.

c) *Körper mit zwei oder mehrere Vielecke tragenden Seitenflächen.* Wird in einem Vierflach $ABCD$ eine vierflächige Vertiefung $EFGH$ gemacht oder aber mit diesem Vierflache ein vierflächiger Ausbau $EFGH'$ verbunden, wo EFG allemal ein Teil von ABC ist, so erhält man einen Körper (8, 12, 7) für welchen $e-k+f=3$ ist. Und dies ist allgemein der Fall, wenn zwei Körper (e, k, f), (e', k', f'), für welche der Eulersche Satz gilt, so zueinander addiert oder voneinander subtrahiert werden, daß eine durchlöcherte Seitenfläche entsteht. Denn durch diese positive und negative Zusammenfügung wird dann ein Polyeder $(e+e', k+k', f+f'-1)$ gebildet, usw. Auf diese

Weise wird auch gezeigt, daß die Beziehung $e - k + f = 2 + r$ gilt, falls es r durchlöcherte Seitenflächen gibt.

Aus obigen Betrachtungen wird mit Lhuilier der Schluß gezogen, daß allgemein die Beziehung

$$e - k + f = 2 + 2p - 2q + r \tag{6}$$

gilt, wo p die Zahl der Höhlungen, q die Zahl der Durchbohrungen und r die Zahl der durchlöcherten Seitenflächen andeutet. Dabei ist dann zu bemerken, daß eine r_1 Vielecke tragende Seitenfläche $r_1 - 1$ zwei Vielecke tragenden Seitenflächen equivalent ist.

Man legt den Polyedern, für welche p, q, r sämtlich verschwinden, den Namen *„Eulersche Körper"* bei und bezeichnet dann alle andern als *„nicht-Eulersche Körper"*. Natürlich enthält die letztere Gruppe auch Polyeder, welche sich dem Eulerschen Satze fügen.

In aller Kürze untersuchen wir, an welcher Stelle die Behauptungen, welche zu den Beweisen des Eulerschen Satzes führten, einer Änderung bedürfen, falls man es mit einem nicht-Eulerschen Körper zu tun hat.

Die Ausnahme der Höhlungen erfordert fast keine Besprechung, weil jede der vier Methoden für die Begrenzung des Körpers sowie für die jeder Höhlung die Formel $e - k + f = 2$ liefert und Addition dieser Gleichungen zum gewünschten Resultate führt.

Bei den Ausnahmen der Durchbohrung und der durchlöcherten Seitenfläche verliert die Methode der Körperzerlegung ihre Anwendbarkeit, indem sie nicht zu einem Vierflache führen kann. Ebenso verlieren dort die zweite Methode der Winkelsumme des Vielecks und die dritte Methode des Inhaltes des sphärischen Vielecks ihre Grundlagen, weil das Polyeder sich weder als ein doppelt überdecktes ebenes Polygon, noch als eine einfach überdeckte Kugeloberfläche projizieren kann. Und bei der vierten Methode der Oberflächenzerlegung versagt der Beweis des mittleren Teiles, weil die gegebene Oberfläche von vornherein mehr als einfach zusammenhängend ist.

Es ist uns innerhalb der gestellten Schranken unmöglich, die Untersuchungen anderer Forscher wie Cauchy, Jordan, Möbius, Listing, Becker zu erwähnen. Es sei nur noch

hervorgehoben, daß die Betrachtungen über den Gültigkeitsbereich des Eulerschen Satzes sich in den letzten Jahrzehnten immer mehr der Theorie der Riemannschen Flächen genähert hat und die Entdeckung der einseitigen Flächen durch Möbius auch von großem Einflusse gewesen ist auf die scharfe Begrenzung der Begriffe. Auf einem 1866 von Jordan gelegten Fundamente fortbauend gab Becker 1869 die sich der Riemannschen Gedankenreihe anschließende allgemeine Formel

$$e - k + f = 2 - p' - 2q' + r', \tag{7}$$

wo p' die Zahl der freien Ränder der nicht geschlossen vorausgesetzten Oberfläche bezeichnet und q' und r' respektive angeben, wieviele geschlossene sich selbst und einander nicht schneidende Konturen auf der Oberfläche gezogen werden können ohne sie in zwei Teile zu zerlegen, und wie oft man in einer Seitenfläche zwei getrennte Vielecke durch einen Querschnitt miteinander verbinden kann ohne die Seitenfläche zu zerstücken.

Aufgabe 25. Was versteht man unter dem *Kantengesetz* von Möbius?

[Nimmt man in jeder Fläche eines Vielflaches ein Kräftepaar an, dessen Größe dem Inhalte dieser Fläche proportional ist, so halten diese Kräftepaare einander das Gleichgewicht, falls sie von der Außenseite jeder Fläche gesehen mit demselben Vorzeichen erscheinen. Denn eine geeignete Wahl des der Krafteinheit entsprechenden Geradensegmentes gestattet jedes dieser Paare durch ein mit der Kontur der Fläche zusammenfallendes Kräftepolygon zu ersetzen, wobei dann in jeder Kante des Vielflaches zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte wirken.

Der Satz, welcher aussagt, daß es bei einem Polyeder mit zwei verschiedenen Seiten immer möglich ist, jeder Flächenkontur einen solchen Bewegungssinn beizulegen, daß jede Kante in zwei verschiedenen Richtungen durchlaufen wird, ist eben das Kantengesetz von Möbius].

17. Folgerungen aus dem Eulerschen Satze. Bezeichnet e_g die Zahl der g-kantigen Ecken und f_h die Zahl der h-seitigen Flächen des Polyeders (e, k, f), welches von

jetzt an immer ein Eulersches Polyeder sein soll, so gelten allgemein die fünf Gleichungen

$$(8)\quad \begin{cases} e-k+f=2, \\ e_3+e_4+\ldots+e_{f-1}=e, \\ f_3+f_4+\ldots+f_{e-1}=f, \\ 3e_3+4e_4+\ldots+(f-1)e_{f-1}=2k, \\ 3f_3+4f_4+\ldots+(e-1)f_{e-1}=2k, \end{cases}$$

welche wohl keiner näheren Erläuterung bedürfen.

Aufgabe 26. Beweise, daß es kein Eulersches von lauter Sechsecken begrenztes Polyeder und überhaupt kein siebenkantiges Polyeder gibt.

Aufgabe 27. Beweise, daß das Polyeder (e, k, f) eine Pyramide ist, wenn e_{f-1} (und also auch f_{e-1}) von Null verschieden ist.

Aus den letzten zwei Gleichungen (8) geht hervor, daß die Ausdrücke $3e_3+5e_5+7e_7\ldots$ und $3f_3+5f_5+7f_7\ldots$ und also auch die einfacheren $e_3+e_5+e_7+\ldots$ und $f_3+f_5+f_7\ldots$ eine gerade Summe liefern, d. h.

„In jedem Polyeder ist die Anzahl der unpaaren Ecken sowie jene der unpaaren Flächen eine gerade Zahl."

„Ein Polyeder mit einer ungeraden Eckenzahl (Flächenzahl) hat wenigstens eine paare Ecke (Fläche)."

Subtrahiert man von der vierfachen Summe der zweiten und dritten Gleichung (8) die Summe der vierten und fünften, so erhält man mit Hilfe der ersten

$$e_3+f_3=8+(e_5+f_5)+2(e_6+f_6)+\ldots,$$

d. h.

„Die Gesamtzahl der dreikantigen Ecken und der dreiseitigen Flächen hat acht zum Minimum."

„Das Vierflach ist das einzige Polyeder mit lauter dreikantigen Ecken und dreiseitigen Flächen."

Subtrahiert man die vierte (fünfte) Gleichung (8) von der sechsfach genommenen zweiten (dritten), so findet man mittels der ersten

$$\begin{cases} 3e_3+2e_4+e_5\geqq 6e-2k=12+4k-6f, \\ 3f_3+2f_4+f_5\geqq 6f-2k=12+4k-6e. \end{cases}$$

Hieraus folgt, weil $2k \geqq 3f$, $2k \geqq 3e$ ist,

$$(9) \qquad 3e_3 + 2e_4 + e_5 \geqq 12, \quad 3f_3 + 2f_4 + f_5 \geqq 12,$$

d. h.

„Es gibt kein Polyeder, in welchem jede Ecke (Fläche) mehr als fünf Kanten zählt. Ein Polyeder ohne dreikantige Ecke (Dreiecksfläche) hat mindestens sechs zur Summe der Anzahlen der vier- und fünfkantigen Ecken (Vierecks- und Fünfecksflächen). Ein Polyeder ohne drei- und vierkantige Ecken (Dreiecks- und Viereckflächen) hat mindestens zwölf fünfkantige Ecken (Fünfecksflächen)."

Subtrahiert man die vierte (fünfte) Gleichung (8) von der mit drei multiplizierten zweiten (dritten), so ergibt sich

$$\begin{cases} e_4 + 2e_5 + 3e_6 + \ldots + (f-4)e_{f-1} = 2k - 3e, \\ f_4 + 2f_5 + 3f_6 + \ldots + (e-4)f_{e-1} = 2k - 3f. \end{cases}$$

Nun ist die Summe der rechten Seiten $k - 6$; wenn die selbstverständlich niemals negativen linken Seiten mit ϱ_e und ϱ_f bezeichnet werden, so hat man also

$$\varrho_e + \varrho_f = k - 6.$$

Unter allen Körpern (e, k, f) mit dem nämlichen Werte von k entspricht also dem allgemeinen Polyeder (9_3) das Minimum Null von ϱ_e und das Maximum $k - 6$ von ϱ_f, dem Trigonalpolyeder umgekehrt das Maximum $k - 6$ von ϱ_e und das Minimum Null von ϱ_f. Weil man sich darüber vereinbart hat, alle nicht allgemeinen Polyeder singulär zu nennen, so kann ϱ_e als *Grad der Singularität* gelten.

Aufgabe 28. Wäre es nicht zweckmäßig, ϱ_e als Grad der Punktsingularität, ϱ_f als Grad der Flächensingularität zu bezeichnen?

Die Untersuchung nach den einem gegebenen Werte von f entsprechenden Grenzen der ϱ_e führt zum nämlichen Resultate. Einerseits ist Null wieder der beim allgemeinen Polyeder auftretende Minimumwert. Andererseits ergibt sich, weil für gegebenes f auch $k - e$ gegeben ist, aus der Beziehung

$$\varrho_e = 2(k-e) - e = 3(k-e) - k,$$

daß ϱ_e Maximum ist für den kleinsten Wert von e und k, d. h. beim Trigonalpolyeder.

Aufgabe 29. Leite die Beziehungen

$$4e_3 + 2e_4 + f_3 \geqq 20\,, \quad 4f_3 + 2f_4 + e_3 \geqq 20$$

ab und gib an, zu welchem Satze sie führen.

18. Einteilung der Polyeder. Früher [9] hat sich schon herausgestellt, daß es nicht möglich ist alle isomorph verschiedenen allgemeinen Polyeder mittels dreieckiger Abstumpfung zu erzeugen. Auf diese Tatsache wirft die zweite der beiden Gleichungen (9) mehr Licht. Denn diese Beziehung zeigt, daß man bei allen Eulerschen Körpern überhaupt und deshalb auch bei den allgemeinen Polyedern P_f mit f Seitenflächen drei Arten P_f', P_f'', P_f''' zu unterscheiden hat, je nachdem unter den f begrenzenden Flächen dreieckige, oder keine dreieckige, wohl aber viereckige, oder aber weder dreieckige noch viereckige sich vorfinden, und nun führt die Wiederholung des Prozesses der dreieckigen Abstumpfung immer zu einem P', niemals aber zu einem P''

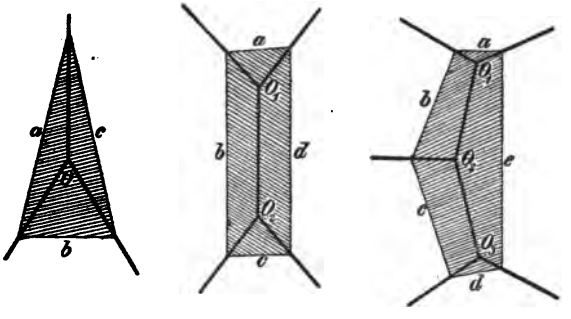


Fig. 24.

oder P'''. Es kann jetzt die dort abgebrochene Untersuchung weiter fortgesetzt und gezeigt werden, daß man alle möglichen allgemeinen Polyeder P_{f+1} erhalten kann, sobald alle möglichen allgemeinen Polyeder P_f bekannt sind. Dazu genügt es auf alle isomorph verschiedenen Weisen eine neue Seitenfläche hinzuzufügen, welche (Fig. 24) entweder eine

Ecke O oder eine Kante O_1O_2 oder aber die Vereinigung zweier angrenzender Kanten O_1O_2 und O_2O_3 abstumpft, wobei der Schnitt der Reihe nach die Form eines Dreiecks abc, eines Vierecks $abcd$ und eines Fünfecks $abcde$ annimmt. Zunächst ist es klar, daß man durch bloße Anwendung des dreieckigen Schnittes alle P'_{f+1} erzeugen kann; denn es führt umgekehrt die Ausbreitung der Nachbarflächen irgend einer Dreiecksfläche eines P'_{f+1} zu einem als bekannt vorausgesetzten P_f zurück. Weiter gibt die Anwendung des viereckigen Schnittes auf alle P''_f und P'''_f — und auf diejenigen P'_f, von welchen entweder a oder c, oder aber a und c die einzigen Dreiecksflächen sind — alle P''_{f+1}. Und endlich liefert die Anwendung des fünfeckigen Schnittes auf alle P'''_f, für welche die Fläche e mindestens sechs Seiten hat — und auf alle P''_f, für welche außerdem a oder d, oder a und d die einzigen Viereckflächen sind — alle P'''_{f+1}.

Aufgabe 30. Beschreibe die drei den Konstruktionen von Fig. 24 dual entgegengesetzten Konstruktionen.

Absichtlich sei hervorgehoben, daß obige Methode zur Bestimmung aller allgemeinen Polyeder von gegebener Flächenzahl $f+1$ sich in der Ausführung schon dadurch als schwerfällig kennzeichnen muß, daß sie die Vorkenntnis aller Polyeder der Flächenzahl f voraussetzt. Deshalb hat man sich nach vielen anderen Methoden umgesehen; von diesen möge allein diejenige Erwähnung finden, mittels welcher es O. Hermes gelungen ist alle allgemeinen Polyeder bis auf $f = 12$ abzuzählen. Folgende kleine Tabelle enthält die dabei gefundenen Anzahlen n_f.

f	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n_f	1	1	2	5	14	50	233	1250	7533

Allein es dürfte, wie Brückner bemerkt, noch offenstehen, ob die für 11 und 12 erhaltenen Werte 1250 und 7533 die endgültigen sind.

Weil die zwei verschiedenen Sechsflache schon im vorhergehenden Paragraphen [9] abgeleitet worden sind, so erläutern wir die mit dem Schlegelschen Diagramme in Verbindung stehende Hermessche Methode (*Journal von Crelle*, Bd. 120, S. 29) am Siebenflache. Wird jedesmal

ein Vieleck mit der größten Seitenzahl als Grundfläche gewählt, so entsprechen den fünf nach Isomorphismus verschiedenen Siebenflachen die Diagramme der Fig. 25; in Verbindung mit dieser Wahl werden die Kanten des Polyeders auf selbstverständliche Weise — vergleiche die verschieden angegebenen Liniensegmente der Figur — in *Grundkanten*, *Seitenkanten* und *Deckkanten* unterschieden und die von der Grundfläche verschiedenen Flächen in *Seitenflächen*

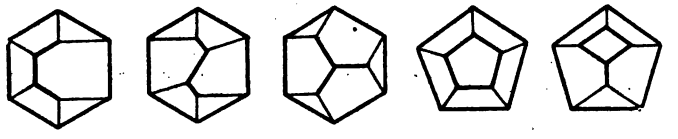


Fig. 25.

und *Deckflächen* eingeteilt. Da nun die Zahl k_s der Seitenkanten, sowie die Zahl f_s der Seitenflächen, der Zahl k_g der Grundkanten gleich ist, so hat man beim allgemeinen f-Flach, d. h. beim $[2(f-2), 3(f-2), f]$ die verschiedenen Fälle

$k_g = k_s = f_s$	f_d	k_d
$f-1$	0	$f-4$
$f-2$	1	$f-2$
$f-3$	2	f
. . . . .		

zu erledigen. Für $f = 7$, d. h. für ein $(10, 15\,7,)$, beschränkt sich dies auf zwei Fälle; denn, wenn das Vieleck mit der größten Seitenzahl ein Viereck ist, so gilt die Gleichung $3f_3 + 2f_4 = 12$ und diese läßt für (f_3, f_4) nur die Wertsysteme $(4, 0), (2, 3), (0, 6)$ zu, was nicht zu einem Siebenflache führt. Nun können die drei Deckkanten des ersten Falles einer sechseckigen Grundfläche — vergleiche die Figuren — entweder eine Seitenfläche von drei einander benachbarten, oder ein Paar benachbarte von einem andern Paare, oder aber drei nicht benachbarte voneinander trennen. Und beim zweiten Falle der fünfeckigen Grundfläche können die fünf Deckkanten entweder eine fünfeckige oder eine viereckige Deckfläche einschließen.

Aufgabe 31. Zu wieviel Lösungen führen die Gleichungen

$$3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 = 30, \quad 3f_3 + 2f_4 + f_5 = 12$$

für das allgemeine Siebenflach?

[Man findet die zehn Fälle

f_3	**0**	0	**1**	1	2	**2**	**2**	**3**	3	4
f_4	**5**	6	**3**	4	1	**2**	**3**	**0**	1	0
f_5	**2**	0	**3**	1	4	**2**	**0**	**3**	1	0
f_6	**0**	1	**0**	1	0	**1**	**1**	**1**	2	3

von welchen nur die fünf in fetter Schrift sich verwirklichen lassen.]

Für die Diagramme der allgemeinen Acht-, Neun-, Zehnflache vergleiche man die Tafel des Brücknerschen Werkes.

Es versteht sich, daß die Anzahlen der Vielflache noch bedeutend größer werden, wenn man die singulären in den Kreis der Betrachtungen aufnimmt. Wir erwähnen nur, daß die Polyeder bis auf $f = 8$ von Hermes (a. a. O., S. 333) abgezählt worden sind, und entnehmen seinen Resultaten folgende kleine Tabelle

f	4	5	6	7	8
n_f	1	2	7	34	257

19. Mutmaßliche Form des mehrdimensional erweiterten Eulerschen Satzes. Die beiden Gleichungen

$$e - k = 0, \quad e - k + f = 2,$$

deren erstere das zweidimensionale Analogon der letzteren bildet, erscheinen unter einem mehr einheitlichen Gesichtspunkte, wenn man ihnen die Gestalt

$$1 - e + k - 1 = 0, \quad 1 - e + k - f + 1 = 0$$

erteilt. Betrachtet man nun die letzte Einheit der linken Seite der ersten Gleichung als die Anzahl $f' = 1$ der Ebenen des Polygons und ebenso die letzte Einheit der linken Seite der zweiten Gleichung als die Anzahl $r' = 1$ der dreidimensionalen Räume des Polyeders, so ergibt sich

$$(10) \quad 1 - e + k - f' = 0, \quad 1 - e + k - f + r' = 0,$$

wobei die Striche auf die besondere Bedeutung dieser Einheiten hinweisen. Und nun liegt die Voraussetzung nahe, daß für Polytope im Raume R_n im allgemeinen die Beziehung

$$(11)\quad \begin{cases} 1 - r_0 + r_1 - r_2 + \ldots + (-1)^{k-1} r_k + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + (-1)^{n-1} r_n' = 0 \end{cases}$$

gelten wird, wenn r_0 die Eckenzahl, r_1 die Kantenzahl, r_2 die Flächenzahl, ..., im allgemeinen r_k die Zahl der k-dimensionalen Grenzpolytope andeutet und r_n' wieder die Einheit ist, welche dem das Polytop tragenden Raume R_n entspricht.

Wir bereiten den allgemeinen Beweis des mehrdimensionalen Satzes (11) vor mittels der Bemerkung, daß die erste der Gleichungen (10) ebenfalls gilt für ein im Aufbau begriffenes Polygon und die zweite ebenfalls für ein im Aufbau begriffenes Polyeder, falls man den verschiedenen Entwicklungsstadien dieses Baues die Bedingung auferlegt, daß jeder der beiden Teile der Begrenzung, d. h. der schon vorhandene und der noch fehlende Teil, ein einfach zusammenhängendes Ganzes bilden soll. So muß es untersagt sein beim Aufbau eines Quadrates auf die erste Seite die ihr gegenüberliegende, beim Aufbau eines Würfels auf die erste Fläche die ihr gegenüberliegende folgen zu lassen; so muß im Falle des Würfels auch das entgegengesetzte Stadium einer Kiste ohne Boden und Deckel vermieden werden. Es ist dann beim entstehenden Polygone $f' = 0$, beim entstehenden Polyeder $r' = 0$ zu nehmen, solange noch kein Stück der Ebene des Polygons, kein Stück des Raumes des Polyeders abgegrenzt worden ist. Wirklich findet man bei irgend einer gebrochenen Linie $e = k + 1$, was mit $f' = 0$ auf $1 - e + k - f' = 0$ hinausläuft, während für den Fall des Polyeders die Beziehung $e - k + f = 1$, welche mit $r' = 0$ zu $1 - e + k - f + r' = 0$ führt, der in umgekehrter Richtung angewandten vierten Methode der Nr. 15 zu entnehmen ist.

Es leuchtet unmittelbar ein, daß die der Reihenfolge der Hinzufügung der Begrenzungsstücke auferlegte Bedingung auch in sich schließt, daß jedes neue Stück sich mit einem einzigen Teile seiner Begrenzung an das schon vorhandene anlehnt. Denn die Hinzufügung eines sich mit zwei voneinander

getrennten Teilen seiner Begrenzung anlehnenden Stückes vermehrt — vergleiche den Fall der Hinzufügung der vierten Fläche bei der Kiste ohne Boden und Deckel — den Zusammenhang des schon aufgebauten Teiles um eine Einheit, weil die dann erhaltene Figur einen neuen Querschnitt zuläßt, nämlich einen der beiden anlehnenden Teile der Begrenzung dieses zuletzt hinzugefügten Stückes.

Schließlich sei noch hervorgehoben, daß die allgemeine Gleichung

$$(12) \qquad 1 - r_0 + r_1 - r_2 + r_3 - r_4 + r_5 - \ldots = 0,$$

deren linke Seite sich bis ins Unendliche fortsetzt, sowohl für Polygone wie für Polyeder gilt und es der folgenden Nummer vorbehalten bleibt, diese Beziehung allgemein für im Aufbau begriffene und vollendete Polytope zu erhärten.

20. Beweis des mehrdimensionalen Eulerschen Satzes. Der gesuchte Beweis kann wieder mit Hilfe der Schlußweise von k auf $k+1$ geführt werden. Setzt man nämlich voraus, die Beziehung (12) gelte schon für jedes im Aufbau begriffene einfach zusammenhängende k-dimensionale Polytop $(Po)_k$ des Raumes R_k, so muß nur gezeigt werden, daß sie eben deshalb auch Geltung hat für jedes im Aufbau begriffene einfach zusammenhängende $k+1$-dimensionale Polytop $(Po)_{k+1}$ des Raumes R_{k+1}. Und dieser Schritt von k auf $k+1$ wird abermals mittels der genannten Schlußweise zurückgelegt, indem bewiesen wird, daß der Wert der linken Seite der Gleichung (12) sich nicht ändert beim Übergange vom aus l Polytopen gebildeten Teile $T_k^{(l)}$ der Begrenzung eines Polytopes $(Po)_{k+1}$ zum aus $l+1$ Polytopen gebildeten Teile $T_k^{(l+1)}$ durch Hinzufügung des $(l+1)$-ten Grenzpolytopes $(Po)_k$, welches sich mit dem einfach zusammenhängenden Teile $T_{k-1}^{(m)}$ seiner Begrenzung an $T_k^{(l)}$ anlehnen mag. Schreibt man nun die drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} 1 - r_0 + r_1 - r_2 + \ldots &= 0 \\ 1 - r_0' + r_1' - r_2' + \ldots &= 0 \\ 1 - r_0'' + r_1'' - r_2'' + \ldots &= 0 \end{aligned}\right\}$$

hin, in welchen sich die ungestrichenen r, die gestrichenen r' und die doppelt gestrichenen r'' der Reihe nach auf das System $T_k^{(l)}$ der l zunächst verwendeten Polytope $(Po)_k$, auf

das um ein $(Po)_k$ vermehrte System $T_k^{(l+1)}$, und auf den Teil $T_{k-1}^{(m)}$ der Begrenzung dieses hinzugefügten Polytops $(Po)_k$ beziehen, so ergibt sich unmittelbar die Beziehung

$$1-(r_0+r_0'-r_0'')+(r_1+r_1'-r_1'')-(r_2+r_2'-r_2'')+\ldots=0,$$

welche aussagt, daß (12) für $T_k^{(l+1)}$ gilt, wenn die Gültigkeit für $T_k^{(l)}$ vorausgesetzt wird. Weil (12) zufolge der ersten Voraussetzung für $(Po)_k$ gilt, so gilt sie nach der Schlußweise von l auf $l+1$ für $T_k^{(2)}$, weiter für $T_k^{(3)}$, für $T_k^{(4)}$, usw. und endlich, — da der Abschluß mittels des letzten $(Po)_k$ die Größen $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}$ unverändert läßt und r_k, r_{k+1} um eine Einheit erhöht —, auch für $(Po)_{k+1}$. Darauf tritt dann die Schlußweise von k auf $k+1$ in Wirkung; weil (12) gilt für $k=3$, so gilt sie für $k=4$, usw.

Wahrscheinlich rührt der erste allgemeine Beweis des Satzes (12) von L. Schläfli her; denn es findet sich diese n-dimensionale Verallgemeinerung des Eulerschen Satzes bewiesen in der Abhandlung „Theorie der vielfachen Kontinuität“, welche von Schläfli in den Jahren 1850 bis 1852 verfaßt, jedoch erst 1901 nach dem Tode Schläflis in den *Denkschriften der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft* von Dr. J. H. Graf, Schläflis Nachfolger an der Universität zu Bern, veröffentlicht wurde. Einzelne Bruchstücke dieser Abhandlung haben in verschiedene Zeitschriften ihren Weg gefunden. So wird die Formel (12) schon 1855 erwähnt im *Journal von Liouville*, Bd. 20, S. 385. Wahrscheinlich hat aber W. I. Stringham 1880 in Bd. 3 des *American Journal of Mathematics* zum ersten Male einen allgemeinen Beweis des Satzes veröffentlicht. Unser Beweis weicht vom Stringhamschen hauptsächlich nur in der Richtung des Prozesses — Ersetzung von Zergliederung durch Aufbau — ab; nur haben wir uns bestrebt die Deutlichkeit der Auseinandersetzung zu erhöhen durch Vorausschickung einiger vorbereitender Bemerkungen, und besonders durch Betrachtung desjenigen Teiles der Begrenzung, mit welchem ein beim Aufbau eines $(Po)_{k+1}$ verwendetes $(Po)_k$ sich dem schon vorhandenen Teile anschließt.

Obiger Beweis läßt auch deutlich hervortreten, innerhalb welcher Grenzen die Gleichung (12) allgemein gilt. Man sieht nämlich sofort ein, daß die Beziehung (12) gelten muß für jedes Polytop $(Po)_n$, dessen begrenzende Flächen, Polyeder

und Polytope sämtlich einfach zusammenhängend sind. Solche Polytope mögen künftighin kurz Eulersche Polytope heißen.

21. Folgerungen aus dem mehrdimensionalen Eulerschen Satze. Weil der allgemeine Satz (12) sich hauptsächlich in einem andern, den regulären Polytopen gewidmeten Abschnitte nützlich zeigen wird, so beschränken wir uns hier auf einige vereinzelte Bemerkungen.

Zunächst möge betont werden, daß der Eulersche Satz ungeachtet seiner allgemeinen Form eine homogene oder eine nicht-homogene Beziehung zwischen den betreffenden Zahlen $r_0, r_1, \ldots$ des Polytopes $(Po)_n$ liefert, je nachdem n gerade oder ungerade ist; d. h. man hat

$$\text{für } n = 2m \quad \ldots \quad r_0 - r_1 + r_2 - \ldots - r_{2m-1} = 0,$$
$$\text{für } n = 2m+1 \quad \ldots \quad r_0 - r_1 + r_2 - \ldots + r_{2m} = 2.$$

Bei einem Polytope $(Po)_n$ laufen in jeden Eckpunkt mindestens n Kanten zusammen, und liegen in einem begrenzenden $(Po)_{n-1}$ mindestens n Grenzräume $(Po)_{n-2}$; also gelten ganz allgemein die zwei Ungleichungen

$$r_1 \geqq \frac{n}{2} r_0, \quad r_{n-2} \geqq \frac{n}{2} r_{n-1}.$$

In den zwei einander dual entgegengesetzten Fällen eines allgemeinen und eines Simplexpolytopes kann man noch eine ganze Reihe solcher Beziehungen hinzufügen. So findet man:

Allgemeines Polytop	*Simplexpolytop*
$2r_1 = (n)_1 r_0$	$2r_{n-2} = (n)_1 r_{n-1}$
$3r_2 \leqq (n)_2 r_0$	$3r_{n-3} \leqq (n)_2 r_{n-1}$
$4r_3 \leqq (n)_3 r_0$	$4r_{n-4} \leqq (n)_3 r_{n-1}$
— — — —	— — — — —
$3r_{n-3} \leqq (n)_2 r_0$	$3r_2 \leqq (n)_2 r_{n-1}$
$2r_{n-2} \leqq (n)_1 r_0$	$2r_1 \leqq (n)_1 r_{n-1}$
$r_{n-1} \leqq r_0$	$r_0 \leqq r_{n-1}$

Es wird dies wohl kaum einer näheren Erläuterung bedürfen. Es ist z. B. in der zweiten Gleichung links die rechte Seite $(n)_2 r_0$ die Zahl, welche angibt wie oft eine Seitenfläche durch einen Eckpunkt geht und deshalb auch

wie oft ein Eckpunkt in einer Seitenfläche liegt; diese letztere Zahl würde gleich $3r_2$ sein, wenn alle Seitenflächen dreieckig wären, ist also im allgemeinen größer als $3r_2$, usw. Nur beim Simplex, welches sowohl allgemeines wie Simplexpolytop ist, können alle Zeichen $\leqq$ durch $=$ ersetzt werden.

Aufgabe 32. Wie können die vierdimensionalen Polytope eingeteilt werden?

[Man findet mit Brückner für gegebenes $r(=r_3)$ die fünf folgenden Fälle mit ihren Merkmalen

		e	k	f
1	Allgemeine Polytope	Max. $>r$	$=2e$ $>f$	$=e+r$ $>2r$
2		$>r$	$>2e$ $>f$	$>2r$ $<k$
3	Autopolare Polytope	$=r$	$>2e$ $=f$	$>2r$ $=k$
4		$<r$	$>2e$ $<f$	$>2r$ $>k$
5	Tetraeder-polytope	Min. $<r$	$>2e$ $=e+r$	$=2r$ $>k$

Indem einerseits die Gruppen 1 und 5, andererseits die Gruppen 2 und 4 einander dual entgegengesetzt sind und die dritte Gruppe in dieser Hinsicht sich selbst entspricht, enthalten alle Gruppen mit Ausnahme der ersten singuläre Polytope.]

Zweiter Abschnitt.

Maßverhältnisse.

§ 3. Kongruenz und Ähnlichkeit.

22. Die Konstantenzahl des Simplex. Durch welche Anzahl voneinander unabhängiger Größen ist das Simplex $S(n+1)$ des Raumes R_n bestimmt, wenn seine Lage nicht mitbestimmt werden soll?

Ist die Konstruktion des $S(n+1)$ schon so weit vorgeschritten, daß ein $S(m)$ gefunden ist $(m \leqq n)$, so erhält man weiter ein $S(m+1)$, von welchem dieses $S(m)$ einen Teil ausmacht, indem man irgend einen außerhalb des Raumes R_{m-1} vom $S(m)$ liegenden Punkt P_{m+1} mit allen Grenzelementen des $S(m)$ verbindet. Nun ist die Lage von P_{m+1} rücksichtlich des $S(m)$ durch die $m-1$ Entfernungen der Projektion P'_{m+1} von P_{m+1} auf R_{m-1} von $m-1$ der m Grenzräume R_{m-2} von $S(m)$ und durch seine Entfernung $P_{m+1}P'_{m+1}$ von R_{m-1} bestimmt. Deshalb hat man

$$c_{m+1} = c_m + m$$

und ist also

$$c_{n+1} = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = (n+1)_2 ,$$

d. h.

Das Simplex $S(n+1)$ des Raumes R_n ist durch $(n+1)_2$ voneinander unabhängige Größen bestimmt.

Aufgabe 33. Früher (I 124_2) ist gefunden worden, daß die Konstantenzahl der zueinander kongruenten Systeme im R_n ebenfalls $(n+1)_2$ ist; ist das im Einklang mit obigem Resultate?

23. Konstruktion und Kongruenz von Simplexen. Der Satz der vorhergehenden Nummer führt zu einer großen Anzahl von Bestimmungsweisen des Simplex $S(n+1)$, bei deren jeder dann nachher untersucht werden muß, wieviel verschiedene Lösungen eintreten können.

Als das einfachste System von Bestimmungsstücken ist allerdings das System der $(n+1)_2$ Kanten zu betrachten. Sind nämlich die Kanten gegeben und ist angewiesen, in welcher Weise sie miteinander verbunden werden sollen, so erhält man aus ihnen unmittelbar die dreieckigen Seitenflächen, aus diesen weiter die viereckigen Grenzräume, usw.

Aufgabe 34. Welche ist wohl die einfachste Art und Weise die Reihenfolge der Zusammensetzung anzugeben?

[Diese, daß man die Kanten $k_{l,m}$ belegt mit den Indizes l, m der durch sie verbundenen Ecken P_l, P_m.]

Obgleich die Bestimmungsweise des $S(n+1)$ durch die $(n+1)_2$ Kanten offenbar eine eindeutige ist, so ist es dennoch nicht immer möglich zwei aus dem nämlichen Kantensysteme aufgebaute Simplexe $S(n+1)$, $S'(n+1)$ miteinander zur Deckung zu bringen. Liegen in einer Ebene ε zwei Dreiecke $P_1P_2P_3$, $P_1'P_2'P_3'$ mit gleichen gleichnamigen Seiten gegeben vor und ist die Bewegung dieser Dreiecke gebunden an die Bedingung, daß die Dreiecke in ε bleiben sollen, so kann man $P_1'P_2'P_3'$ immer so legen, daß P_1' mit P_1 und P_2' mit P_2 zusammenfällt; allein es ist dann die Lage von $P_1'P_2'P_3'$ völlig bestimmt und es kann nun P_3' entweder mit P_3 zusammenfallen oder das Spiegelbild von P_3 in bezug auf P_1P_2 bilden. Wäre es aber erlaubt das Dreieck $P_1'P_2'P_3'$ außerhalb der Ebene ε zu bringen, so würde eine nachträgliche „Umlegung" (I 109_1) von $P_1'P_2'P_3'$ um $P_1'P_2'$ $= P_1P_2$ im letzteren Falle genügen, um die verlangte Deckung zu bewirken. Ebenso kann man im Falle der zwei Simplexe $S(n+1)$, $S'(n+1)$ das letztere stets nur so bewegen, daß die Ecken P_1', P_2', …, P_n' mit den gleichnamigen Ecken $P_1, P_2, \ldots, P_n$ zusammenfallen, und es stellt sich dann heraus, daß P_{n+1}' entweder mit P_{n+1} zusammenfällt oder aber das Spiegelbild von P_{n+1} in bezug auf den Raum R_{n-1} durch $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ist. Im ersten Falle ist dann die verlangte Deckung erzielt, im letzteren ist sie innerhalb des Operationsraumes unmöglich. In beiden Fällen nannten wir die Systeme

kongruent; im ersteren Falle ist die Kongruenz positiv, im zweiten negativ (I 109_1).

Zur Vorbereitung anderer Entwicklungen ist es wünschenswert, auf obigen Punkt ein wenig mehr Licht zu werfen. Dazu denken wir uns im R_n ein $S(m+1)$ dadurch bestimmt, daß das partielle $S(m)$ mit den Ecken $P_1, P_2, \ldots, P_m$ mit Inbegriff seiner Lage im R_n gegeben ist und man außerdem die Länge der durch P_{m+1} gehenden Kanten kennt. Unter diesen Umständen ist, — welches auch der übrig bleibende Grad von Beweglichkeit des Punktes P_{m+1} sein möge —, die Projektion dieses Punktes auf irgend eine Kante P_iP_k des $S(m)$ ein bestimmter Punkt $P_{i,k}$; denn man hat

$$P_iP_{m+1}^2 - P_iP_{i,k}^2 = P_kP_{m+1}^2 - P_kP_{i,k}^2$$

und also auch

$$P_iP_{i,k}^2 - P_kP_{i,k}^2 = P_iP_{m+1}^2 - P_kP_{m+1}^2,$$

d. h. es ist die Differenz der Quadrate der Abstände von $P_{i,k}$ zu P_i und P_k konstant, woraus unmittelbar hervorgeht, daß $P_{i,k}$ ein bestimmter Punkt der Kante P_iP_k ist. Deshalb ist die Projektion Q_{m+1} von P_{m+1} auf den Raum R'_{m-1} des festen $S(m)$ ebenfalls ein bestimmter Punkt, nämlich der einzige Schnittpunkt der $m-1$ Räume R_{m-2}, welche im R'_{m-1} der Reihe nach auf P_1P_2 in $P_{1,2}$, auf P_1P_3 in $P_{1,3}$, ... und auf P_1P_m in $P_{1,m}$ senkrecht stehen. Aus irgend einer der Beziehungen

$$P_iP_{m+1}^2 - P_iQ_{m+1}^2 = P_{m+1}Q_{m+1}^2$$

folgt dann weiter, daß auch $P_{m+1}Q_{m+1}$ bekannt ist; d. h. der Ort des Punktes P_{m+1} im R_n ist zu gleicher Zeit im Raume R'_{n-m+1}, welcher in Q_{m+1} senkrecht auf R'_{m-1} steht, der Ort des Punktes mit gegebener Entfernung von Q_{m+1} und also ein *Kugelraum* K_{n-m} mit Q_{m+1} als Mittelpunkt, $P_{m+1}Q_{m+1}$ als Radius und R'_{n-m+1} als Träger. Durch Drehung des $S(m+1)$ um R'_{m-1} kann der Punkt P_{m+1} mit jedem Punkte dieses Kugelraumes zur Koinzidenz gebracht werden.

Schon aus dem einfachen Falle $n=2$ des Dreiecks ist bekannt, daß zwischen den $(n+1)_2$ Kanten des $S(n+1)$ Ungleichungen obwalten; werden die Seiten des Dreiecks mit x_i, $(i=1, 2, 3)$ bezeichnet, so hat man

$$x_2 + x_3 \geqq x_1, \quad x_1 + x_3 \geqq x_2, \quad x_1 + x_2 \geqq x_3 .$$

Und beim Vierflach, wo etwa x_1, x_2, x_3 die Seiten irgend einer Fläche und y_1, y_2, y_3 die ihnen gegenüberliegenden Kanten sind, findet man zunächst vier analoge Systeme von je drei Beziehungen zwischen

$$(x_1, x_2, x_3), \quad (x_1, y_2, y_3), \quad (y_1, x_2, y_3), \quad (y_1, y_2, x_3)$$

und außerdem die Ungleichung sechsten Grades

$$(13) \qquad x_1^2 x_2^2 x_3^2 + \Sigma x_1^2 y_1^4 < \Sigma (x_1^2 y_1^2 + y_2^2 y_3^2)(x_2^2 + x_3^2 - x_1^2),$$

welche aussagt, daß die aus den Eckpunkten A_1, A_2, A_3 mit y_1, y_2, y_3 als Radien beschriebenen Kreise ein Potenzzentrum mit gemeinschaftlicher *negativer* Potenz bestimmen, dieses Potenzzentrum also innerhalb der drei Kreise liegt und diese Kreise deshalb ein krummliniges Dreieck einschließen; denn nur unter dieser Bedingung ist das Potenzzentrum wirklich die Projektion der vierten Ecke A_4 eines möglichen Vierflachs.

Aufgabe 35. Wie steht die Beziehung (13) in Verbindung mit der Gleichung, welche die drei Seiten x_1, x_2, x_3 eines Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ an die drei Entfernungen y_1, y_2, y_3 eines vierten Punktes A_4 der Ebene von den Ecken A_1, A_2, A_3 knüpft?

[Liegt der vierte Punkt A_4 in der Ebene des Dreiecks, so ist die in Rede stehende Potenz Null und die Kreise lassen einen gemeinschaftlichen Punkt, den Punkt A_4, zu. Also findet man die gesuchte Bedingung, welche aussagt, daß die vier Punkte A in der nämlichen Ebene enthalten sind, mittels Ersetzung des Zeichens der Ungleichheit durch das Gleichheitszeichen.]

Im nächsten Paragraphen wird bewiesen werden, daß die Beziehung (13) auch mittels Inhaltsbetrachtungen des Vierflachs abgeleitet werden kann.

Aufgabe 36. Stehen die drei Beziehungen des einfachsten Falles $n = 2$ nun auch in Verbindung mit der Bedingung, daß drei Punkte in der nämlichen Gerade liegen?

[Man denke an die Inhaltsformel des Dreiecks

$$(x_1 + x_2 + x_3)(-x_1 + x_2 + x_3)(x_1 - x_2 + x_3)(x_1 + x_2 - x_3) = 16\,\mathrm{I}^2 .]$$

[Wir erinnern hier beiläufig an das Problem, bei dem es sich um die Wahrscheinlichkeit handelt, daß sich ein Dreieck konstruieren lasse mit den Stücken eines auf irgend eine Weise in drei Teile geteilten Geradensegmentes als Seiten, und an seine geometrische Lösung, wonach diese Wahrscheinlichkeit den Wert $\frac{1}{4}$ hat, weil Verbindung der Mitten der Seiten eines gegebenen Dreiecks ein neues Dreieck liefert, dessen Inhalt ein Viertel des Inhalts des ursprünglichen Dreiecks ist. Natürlich muß hier das ungleich schwerere Problem der Wahrscheinlichkeit, daß die Stücke eines in sechs Teile geteilten Geradensegmentes die Kanten eines Vierflachs seien, ganz unbesprochen bleiben.]

So fortfahrend, findet man beim Fünfzell des Raumes R_4 zunächst 30 lineare Beziehungen oder wenn man will 10 Beziehungen $\Delta_2 > 0$ vom vierten Grade für die 10 Flächen, sodann 5 Beziehungen $\Delta_3 > 0$ sechsten Grades für die 5 dreidimensionalen Grenzräume, und endlich noch eine einzige Beziehung achten Grades, in welcher alle Kanten auftreten.

Nennt man der Kürze halber ein das $S(n+1)$ eindeutig bestimmendes System von gegebenen Größen ein eindeutiges Bestimmungssystem, so gilt selbstverständlich der Satz:

„Zwei Simplexe $S(n+1)$ und $S'(n+1)$ sind kongruent, sobald für beide das nämliche eindeutige Bestimmungssystem vorliegt und dies bei der Konstruktion beider Simplexe in derselben Weise angewendet worden ist.“

Wir erwähnen jetzt einige spezielle Fälle der eindeutigen Bestimmung:

„Ein $S(n+1)$ ist eindeutig bestimmt, wenn man

1. *die Längen aller in einen Punkt O zusammenlaufenden Kanten OP_i und*
2. *die von diesen Kanten OP_i paarweise (OP_i, OP_k) gebildeten Winkel P_iOP_k*

als bekannt voraussetzt.“

Es sind dann nämlich alle Dreiecke P_iOP_k und deshalb auch alle nicht durch O gehenden Kanten P_iP_k, d. h. alle Kanten, bekannt.

Ebenso gilt allgemein der Satz:

„Denkt man sich das $S(n+1)$ nach den Eckpunkten zerlegt in die zwei partiellen Simplexe $S(p+1)$, $S(n-p)$ und setzt als bekannt voraus

1. *die $(p+1)_2$ Kanten P_iP_k des $S(p+1)$,*
2. *die $(n-p)_2$ Kanten Q_iQ_k des $S(n-p)$ und*
3. *die $(p+1)(n-p)$ Winkel zwischen dem das $S(p+1)$ tragenden Raume R'_p und den durch je p Eckpunkte P von $S(p+1)$ und einen Eckpunkt Q von $S(n-p)$ bestimmten Räumen R_p,*

so ist das $S(n+1)$ eindeutig bestimmt.“

Es ist dann nämlich von jedem der $n-p$ Simplexe $S(p+2)$, welche alle Eckpunkte P des $S(p+1)$ und einen einzigen Q des $S(n-p)$ zu Eckpunkten haben, außer dem partiellen $S(p+1)$ das System der $p+1$ Winkel gegeben, welche R'_p mit den durch die in Rede stehende Ecke Q und die Grenzräume R_{p-1} von $S(p+1)$ zu legenden Räumen R_p bildet; deshalb kann in irgend einem durch R'_p angenommenen Raume R_{p+1} die Konstruktion dieser $n-p$ Simplexe $S(p+2)$ unmittelbar vollzogen werden, und diese fördert dann alle bis jetzt noch unbekannten Kanten des $S(n+1)$ zutage.

Ebenso gilt allgemein der Satz:

„Denkt man sich das $S(n+1)$ nach den Eckpunkten zerlegt in die zwei partiellen Simplexe $S(2p)$, $S(n-2p+1)$ und im ersteren ein System von p alle Eckpunkte aufnehmenden Kanten P_1P_2, P_3P_4, …, $P_{2p-1}P_{2p}$ angenommen, so erhält man eine eindeutige Bestimmung dieses $S(n+1)$, wenn man

1. *die $(2p)_2$ Kanten P_iP_k des $S(2p)$,*
2. *die $(n-2p+1)_2$ Kanten Q_iQ_k des $S(n-2p+1)$ und*
3. *die $(2p)(n-2p+1)$ Winkel zwischen den unbekannten Kanten und den von ihnen geschnittenen Kanten P_1P_2, P_3P_4, …, $P_{2p-1}P_{2p}$*

als gegeben betrachtet.“

Auch hier sind, wie sofort einleuchtet, die unbekannten Kanten unmittelbar zu konstruieren.

Aufgabe 37. Ist es immer leicht den Grad der Vieldeutigkeit eines Systemes von Bestimmungsstücken anzugeben?

[Man untersuche den Fall, wo von einem Vierflache fünf Kanten und der Neigungswinkel an der sechsten Kante gegeben sind.]

24. Ähnlichkeit der Simplexe. Schneidet man (Fig. 26) ein $S(n+1)$ mit einem zu dem den Punkt P_1 nicht enthaltenden Grenzraume $R^{(1)}_{n-1}$ parallelen Raume $R'^{(1)}_{n-1}$, so werden alle durch P_1 gehenden Kanten P_1P_i in einem Punkte P'_i geschnitten, und erhält man also auf der Seite des Punktes P_1 ein neues Simplex $S'(n+1)$. Dieses neue Simplex $S'(n+1)$ steht zum ursprünglichen in einer einfachen Beziehung.

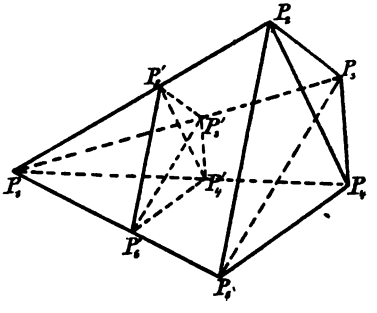


Fig. 26.

Weil nämlich jede Ebene, welche zwei Kanten P_1P_i und P_1P_k enthält, durch die zwei parallelen Räume $R^{(1)}_{n-1}$ und $R'^{(1)}_{n-1}$ in zwei parallelen Geraden P_iP_k und $P'_iP'_k$ geschnitten wird, so sind die Kanten des $S'(n+1)$, welche nicht mit den gleichnamigen Kanten des $S(n+1)$ zusammenfallen, zu diesen gleichnamigen Kanten parallel. Hieraus geht dann unmittelbar hervor, daß die Winkel des $S'(n+1)$ den homologen Winkeln des $S(n+1)$ gleich sind und die Kanten des $S'(n+1)$ sich der Länge nach untereinander verhalten wie die homologen Kanten des $S(n+1)$.

Nach unseren früheren Entwicklungen (I 113) sind $S(n+1)$ und $S'(n+1)$ einander entsprechende Teile zweier ähnlicher und ähnlich liegender Systeme, für welche P_1 der einzige eigentliche Koinzidenzpunkt ist. Dementsprechend mögen die Simplexe $S(n+1)$, $S'(n+1)$ hier *ähnlich* und *ähnlich liegend* heißen, P_1 als *Ähnlichkeitspunkt*, das Verhältnis $P_1P_i : P_1P'_i$ als *Ähnlichkeitsverhältnis* bezeichnet und von positiv oder negativ ähnlichen und ähnlich liegenden Simplexen gesprochen werden, je nachdem dieses Verhältnis

positiv oder negativ ist. Nach einer willkürlichen Ortsveränderung eines der beiden Simplexe bleibt dann nur noch die Ähnlichkeit beider Gebilde bestehen, indem wir zwei Simplexe ähnlich nennen, falls ihre Ecken so bezeichnet werden können, daß die Kanten des einen sich untereinander verhalten wie die gleichnamigen Kanten des andern. Auch hier tut sich der Unterschied zwischen positiver und negativer Ähnlichkeit wieder durch ein anderes Merkmal kund, indem man zwei ähnliche Simplexe positiv oder negativ ähnlich nennt, je nachdem das eine positiv oder negativ kongruent ist zu einem dritten Simplex, welches zum zweiten eine positiv ähnliche Lage hat.

Aus diesen einleitenden Betrachtungen folgt nun der Satz:

„Verwendet man irgend ein eindeutiges Bestimmungssystem eines gegebenen Simplex $S(n+1)$ zur Konstruktion eines zweiten, nachdem man alle in diesem Systeme enthaltenen Strecken im nämlichen Verhältnisse vergrößert oder verkleinert hat, so erhält man ein zu $S(n+1)$ ähnliches Simplex $S'(n+1)$."

Die Anwendung dieses allgemeinen Satzes auf alle in der vorhergehenden Nummer hervorgehobenen Bestimmungsweisen des $S(n+1)$ gibt ebensoviele spezielle Fälle der Ähnlichkeit zweier Simplexe. Um nicht zu weitläufig zu werden, erwähnen wir nur den folgenden, welcher uns später nützlich sein wird:

„Sind von zwei Simplexen $S(n+1)$, $S'(n+1)$ die gleichnamigen Kanten OP_i, $O'P_i'$ durch ein Paar gleichnamiger Eckpunkte O, O' einander proportional und die eingeschlossenen Winkel P_iOP_k des einen allemal den gleichnamigen Winkeln des andern gleich, so sind die Simplexe einander entweder positiv oder negativ ähnlich."

25. Homologe Punkte und Geraden kongruenter und ähnlicher Simplexe. Liegen zwei ähnliche Simplexe $S(n+1)$, $S'(n+1)$ mit den Eckpunkten P_i, P_i', den diesen Punkten gegenüberliegenden $(n-1)$-dimensionalen Grenzräumen α_i, α_i' und den von diesen Grenzräumen zu je zwei und zwei gebildeten $(n-2)$-dimensionalen Grenzräumen $\alpha_{i,k}$, $\alpha_{i,k}'$ gegeben vor, so ist der am $\alpha_{i,k}$ durch α_i und α_k gebildete Winkel

$(\alpha_{i,k})$ allemal dem am $\alpha'_{i,k}$ durch α'_i und α'_k gebildeten Winkel $(\alpha'_{i,k})$ gleich, und es haben diese Paare gleicher Winkel alle entweder die nämliche oder entgegengesetzte Orientierung, je nachdem $S(n+1)$ und $S'(n+1)$ positiv oder negativ ähnlich sind. Nimmt man nun innerhalb $S(n+1)$ einen Punkt P willkürlich an und bilden die n Räume $R^{(i)}_{n-1}$ durch P und einen der n Räume $\alpha_{i,n+1}$, $(i=1, 2, \ldots, n)$ mit α_{n+1} die Winkel $\varphi^{(i)}$, so kann man innerhalb $S'(n+1)$ die n Räume $R'^{(i)}_{n-1}$ durch $\alpha'_{i,n+1}$, $(i=1, 2, \ldots, n)$ anbringen, welche mit α'_{n+1} der Reihe nach in entsprechender Weise die gleichen Winkel $\varphi^{(i)}$ bilden; wobei dann die Hinzufügung „in entsprechender Weise" so zu deuten ist, daß die gleichen Winkel $\varphi^{(i)}$ im $S(n+1)$ und im $S'(n+1)$ alle entweder gleich oder entgegengesetzt orientiert sind, je nachdem die Simplexe positiv oder negativ ähnlich sind. Ist P' der Schnittpunkt dieser n neuen Räume $R'^{(i)}_{n-1}$, so haben P und P' in bezug auf $S(n+1)$ und $S'(n+1)$ als Koordinatensimplexe offenbar normale Abstandskoordinaten $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ und $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1})$, für welche die n Beziehungen

$$\frac{x_i}{x_{n+1}} = \frac{\sin[(\alpha_{i,n+1}) - \varphi^{(i)}]}{\sin\varphi^{(i)}}, \quad \frac{x'_i}{x'_{n+1}} = \frac{\sin[(\alpha_{i,n+1}) - \varphi^{(i)}]}{\sin\varphi^{(i)}}$$

gelten; deshalb ist auch

$$\frac{x_i}{x'_i} = \frac{x_{n+1}}{x'_{n+1}},$$

d. h. die Punkte P und P' haben in $S(n+1)$ und $S'(n+1)$ proportionale Koordinaten. Und weil es sich bei diesen Koordinaten ja nur um die Verhältnisse handelt, so kann man auch behaupten, daß P und P' in $S(n+1)$ und $S'(n+1)$ gleiche Koordinaten haben. Hieraus kann abgeleitet werden — und zur Abkürzung des zu diesem Resultate führenden Beweisganges diente eben nur die momentane Anwendung des Koordinatenbegriffes —, daß nicht nur die Räume $R^{(i,n+1)}_{n-1} = (P, \alpha_{i,n+1})$ und $R^{(i,n+1)}_{n-1} = (P', \alpha'_{i,n+1})$ die gleichen Winkel $(\alpha_{i,n+1})$ und $(\alpha'_{i,n+1})$, sondern daß alle Räume $R^{(i,k)}_{n-1} = (P, \alpha_{i,k})$ und $R'^{(i,k)}_{n-1} = (P', \alpha'_{i,k})$ überhaupt die gleichen Winkel $(\alpha_{i,k})$ und $(\alpha'_{i,k})$ auf gleiche Weise teilen. Deshalb mögen P und P' *homologe* Punkte von $S(n+1)$ und $S'(n+1)$ heißen.

Aus dieser Definition des Begriffes der homologen Punkte folgt nun:

a) Es gelten allgemein die Beziehungen:

$$\frac{PP_i}{P'P_i'} = \frac{P_iP_k}{P_i'P_k'} = \lambda,$$

wo λ das Ähnlichkeitsverhältnis heißen mag.

b) Es bilden PP_i und $P'P_i'$ mit den einander entsprechenden Grenzgebilden der Simplexe $S(n+1)$ und $S'(n+1)$ gleiche Winkel.

c) Sind P, P' und Q, Q' zwei Paare homologer Punkte von $S(n+1)$ und $S'(n+1)$ und liegt Q innerhalb des Simplex $S_i(n+1)$ mit den Ecken $P, P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_{n+1}$, so liegt Q' innerhalb des Simplex $S_i'(n+1)$ mit den Ecken $P', P_1', \ldots, P_{i-1}', P_{i+1}', \ldots, P_{n+1}'$, und es sind Q und Q' ebenfalls homologe Punkte in bezug auf $S_i(n+1)$ und $S_i'(n+1)$.

d) Es gelten allgemein die Beziehungen:

$$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{P_iP_k}{P_i'P_k'} = \lambda$$

und die Verbindungsgeraden PQ und $P'Q'$ bilden mit den einander entsprechenden Grenzelementen von $S(n+1)$ und $S'(n+1)$ gleiche Winkel.

So fortfahrend findet man schließlich den allgemeinen Satz:

„Beschreibt ein Punkt P im Simplex $S(n+1)$ eine Figur, so durchläuft der homologe Punkt P' im Simplex $S'(n+1)$ eine ähnliche Figur, wobei λ dann wieder das Ähnlichkeitsverhältnis bildet."

Es beschreiben also die zueinander in bezug auf $S(n+1)$ und $S'(n+1)$ homologen Punkte ähnliche Figuren im Sinne der früheren projektiven Entwicklungen (I 113); hieraus ist dann weiter unmittelbar zu entnehmen, was man unter homologen Geraden, homologen Ebenen, homologen Räumen, usw. zu verstehen hat. Sind die Simplexe $S(n+1)$ und $S'(n+1)$ ähnlich und ähnlich liegend, so sind alle homologen Geraden einander parallel; sind sie kongruent, so sind alle homologen Geraden einander gleich, usw.

Haben wir früher (I 110) angegeben, in welchen Fällen zwei kongruente Systeme C_n, C'_n im R_n einen eigentlichen Koinzidenzpunkt haben und wie dieser Punkt konstruiert werden kann, so sind wir jetzt imstande, für zwei ähnliche Systeme A_n, A'_n im R_n das nämliche zu leisten. Dadurch wird dann außerdem Aufgabe 256 (I 113) ergänzt werden. Dort wurde behauptet, daß zwei positiv ähnliche Systeme A_{2k}, A'_{2k} im R_{2k} und zwei negativ ähnliche Systeme A_{2k+1}, A'_{2k+1} im R_{2k+1} einen eigentlichen Koinzidenzpunkt zulassen, was offenbar eine unmittelbare Folge der Tatsache ist, daß zwei ähnliche Systeme sich im Unendlichen wie kongruente Systeme verhalten und der einzige Koinzidenzpunkt, welcher mit den n Koinzidenzpunkten im $\overline{U}_n$ die $n+1$ Koinzidenzpunkte im R_n bildet, deshalb nicht mit einem Koinzidenzpunkte U zusammenfallen kann, weil es — vergleiche den allgemeinen Satz (I 111) — im Falle α) keinen U, im Falle δ) nur einen U_-, keinen U_+ gibt. Allein es läßt sich beweisen, daß zwei ähnliche Systeme A_n, A'_n im R_n *immer* einen eigentlichen Koinzidenzpunkt zulassen. Liegen nämlich von diesen beiden Systemen zwei homologe Simplexe $S(n)$, $S'(n)$ mit den Eckpunktengruppen $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$, $(P'_1, P'_2, \ldots, P'_n)$ gegeben vor, — wobei das Zeichen der Ähnlichkeit noch unbestimmt bleibt —, so muß jeder eigentliche Koinzidenzpunkt in den n Kugelräumen $K_n^{(i)}$ liegen, welche für die Paare homologer Eckpunkte P_i, P'_i die Örter derjenigen Punkte bilden, zwischen deren Entfernungen von P_i, P'_i das Verhältnis λ der Ähnlichkeit obwaltet. Und diese Kugelräume haben offenbar (2^n) zwei Punkte miteinander gemein. Nun ist aber — vergleiche die oben erwähnten Fälle α) und δ) — einer dieser beiden gemeinschaftlichen Punkte immer reell, der andere muß es also auch sein; weil zwei ähnliche Systeme zwei eigentliche Koinzidenzpunkte nicht zulassen, falls sie nicht kongruent sind, so müssen also die beiden reellen Schnittpunkte der n Kugelräume Koinzidenzpunkte zweier verschiedener Paare ähnlicher Systeme sein, und der eine den positiv ähnlichen, der andere den negativ ähnlichen Systemen entsprechen.

26. Die einfachsten merkwürdigen Punkte der Simplexe. Anstatt die speziellen Eigenschaften einer ganzen Reihe von merkwürdigen Punkten des Simplex weiterhin in einem ab-

sonderlichen Paragraphen als „Geometrie des Simplex" zu vereinen, wollen wir uns damit begnügen, hier auf drei dieser Punkte aufmerksam zu machen, welche wir bei unseren weiteren Betrachtungen sofort zu kennen brauchen; es sind dies das Inzentrum, das Umzentrum und das Baryzentrum oder der Schwerpunkt.

Inzentrum. Werden von einem Simplex $S(n+1)$ mit den $(n-1)$-dimensionalen Grenzräumen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ die n Winkel (α_i, α_{n+1}), welche $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ mit α_{n+1} bilden, durch die $(n-1)$-dimensionalen Räume $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ gehälftet, so schneiden sich diese n Räume β_i in einem Punkte I, welcher innerhalb $S(n+1)$ liegt und von allen Grenzräumen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ gleichweit entfernt ist. Der Kugelraum mit I als Zentrum und dem Abstande dieses Punktes von den Räumen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ als Radius wird der *Inkugelraum* des Simplex genannt; deshalb heißt I das Inzentrum.

Umzentrum. Werden von einem Simplex $S(n+1)$ mit den Eckpunkten $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ die in P_{n+1} zusammenlaufenden Kanten P_iP_{n+1} durch die $(n-1)$-dimensionalen Räume $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ senkrecht halbiert, so schneiden sich diese n Räume γ in einem Punkte U, welcher von allen Ecken $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ gleichweit entfernt ist. Der Kugelraum mit U als Zentrum und dem Abstande dieses Punktes von den $n+1$ Ecken als Radius wird der *Umkugelraum* genannt; deshalb heißt U das Umzentrum.

Schwerpunkt. Nimmt man an, daß in den Eckpunkten $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ eines Simplex $S(n+1)$ gleiche parallele Kräfte wirken, und sucht man in bekannter Weise den Angriffspunkt der Resultierende, so findet man — am leichtesten mit Hilfe des Momentensatzes in bezug auf die $n+1$ Grenzräume $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ — einen Punkt B, dessen Abstände von diesen Räumen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ erhalten werden, indem man (I 80_5) die entsprechenden Höhen P_1Q_1, $P_2Q_2, \ldots, P_{n+1}Q_{n+1}$ des $S(n+1)$ durch $n+1$ dividiert.

Aus dieser Bestimmungsweise des Baryzentrums B des Simplex geht unmittelbar der folgende allgemeine Satz hervor:

„Hat man $S(n+1)$ auf irgend eine Weise nach den Ecken in die zwei Simplexe $S(p+1)$ und $S(n-p)$ zerlegt, und sind B' und B'' die Schwerpunkte dieser partiellen

Simplexe, so liegt B an einer solchen Stelle auf dem Geradensegmente B'B'', daß die Teile B'B und BB'' sich wie $n-p$ und $p+1$ verhalten."

Aufgabe 38. Beweise, daß dieser Satz $2^n - 1$ Geraden durch den Schwerpunkt liefert, und daß die Zerlegung des Simplex $S(n+1)$ in drei partielle Simplexe $\frac{1}{2}(3^n+1) - 2^n$ Ebenen durch den Schwerpunkt finden läßt.

27. Die Konstantenzahl der Polytope. Wie Herr Schubert vor kurzem zuerst nachgewiesen, läßt sich die Konstantenzahl des Polytopes $(Po)_n$ im R_n durch drei der das Polytop kennzeichnenden Zahlen ausdrücken; bezeichnet c' diese Zahl unter der Voraussetzung, daß die Lage mitbestimmt werden soll, so hat man nämlich allgemein

$$c' = n(r_0 + r_{n-1}) - r_{0,n-1}, \tag{14}$$

wo r_0 und r_{n-1}, wie im vorhergehenden Paragraphen, die Zahlen der Ecken P_i und der $(n-1)$-dimensionalen Grenzräume α_k angeben, und die neu hinzutretende Größe $r_{0,n-1}$ angibt, wie oft ein P_i in einem α_k liegt, und also auch, wie oft ein α_k durch einen P_i geht.

Der ganz einfache Beweis dieser Formel, welcher sogar vom Eulerschen Satze unabhängig ist, wird (vergleiche den *Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung*, Teil XI, S. 217, 1902) folgendermaßen geführt. Man würde für c' den Wert nr_0 finden, falls alle Eckpunkte P_i voneinander unabhängig und also alle Grenzräume α_k Simplexe wären. Sobald aber irgend ein Grenzraum auch nur einen überzähligen Eckpunkt enthält, ist dieser Punkt gebunden an die Bedingung, in dem durch die n übrigen Eckpunkte bestimmten Raume R_{n-1} liegen zu müssen, und können also von den n diesen Punkt bestimmenden Größen nur $n-1$ willkürlich gewählt werden, was zu einer Verringerung der Konstantenzahl um eine Einheit führt. Weil ebenso gefunden wird, daß die Konstantenzahl um p Einheiten herabgedrückt wird, wenn ein Grenzraum $n+p$ Eckpunkte enthält, so findet man, wenn $u^{(p)}$ die Zahl dieser Grenzräume mit $n+p$ Eckpunkten angibt, allgemein

$$c' = nr_0 - \sum_{p=1}^{r_0-n-1} p\,u^{(p)},$$

wo die untere Grenze des Summenzeichens wohl auch Null sein kann. Nun ist für die nämlichen Grenzen

$$\Sigma(n+p)\,u^{(p)} = r_{0,n-1}, \quad \Sigma u^{(p)} = r_{n-1};$$

man findet somit, wenn man die mit n multiplizierte zweite Gleichung von der ersten subtrahiert,

$$\Sigma p\,u^{(p)} = r_{0,n-1} - n\,r_{n-1}$$

und deshalb auch die Beziehung (14).

Ist nun c die Konstantenzahl des Polytopes $(Po)_n$ ungeachtet seiner Lage, so hat man $c = c' - (n+1)_2$, wie aus einer Lösung der Aufgabe 33 zu entnehmen ist.

Für allgemeine Polytope hat man $r_{0,n-1} = n\,r_0$, für Simplexpolytope ist $r_{0,n-1} = n\,r_{n-1}$. Also sind die Konstantenzahlen c_a und c_s für beide Gebilde

$$c_a = n\,r_{n-1}, \quad c_s = n\,r_0.$$

Wir erwähnen hier nur diejenigen Konstantenzahlen c, bei welchen die Lage nicht mitbestimmt werden soll, weil diese bei Kongruenzfragen die wichtigeren sind.

Aufgabe 39. Wie groß ist c bei einem Polyeder?

[Man hat $c = k$; denn es ist

$$c = 3(e+f) - r_{0,2} - 6, \quad r_{0,2} = 2k.]$$

Es wird die Konstantenzahl natürlich herabgedrückt durch einen besonderen Bau der Grenzelemente $\alpha_{i,k}$, $\alpha_{i,k,l}$, usw. niedrigerer Dimensionenzahl, auch wenn dieser die Größe $r_{0,n-1}$ nicht beeinflußt. So wird die Konstantenzahl 12 des Sechsflachs (8, 12, 6) mit sechs vierseitigen Flächen durch die Bedingung, daß alle Kanten die nämliche Länge haben sollen, bis auf 4 reduziert, obgleich r_0, r_2, $r_{0,2}$ ihre Werte 8, 6, 24 ungeändert beibehalten. Wir beleuchten diesen Punkt, indem wir die allgemeinen in Nr. 12 besprochenen Gruppen besonderer Polytope auf ihre Konstantenzahl untersuchen.

a) *Pyramiden.* Liegt eine Pyramide $Py\,[(Po)_m, S(n-m)]$ gegeben vor, von welcher das Polytop $(Po)_m$ im Raume R_m das Grundpolytop und $n-m$ mit R_m den Raum R_n bestimmende Punkte P_i die Scheitel sind, so ist diese Pyramide durch das Grundpolytop und die Lage der $n-m$ Scheitel

in bezug auf dieses Grundpolytop und zueinander bestimmt; also hat man, wenn r_0, r_{m-1}, $r_{0,m-1}$ die kennzeichnenden Zahlen des $(Po)_m$ sind,

$$c = m(r_0 + r_{m-1}) - r_{0,m-1} - (m+1)_2 + \tfrac{1}{2}(n-m)(n+m+1),$$

wo $\frac{1}{2}(n-m)(n+m+1)$ erscheint als Summe der arithmetischen Reihe

$$(m+1) + (m+2) + \ldots + (n-1) + n.$$

Weiter ergibt sich, daß die drei sich auf die Pyramide beziehenden Größen ϱ_0, ϱ_{n-1}, $\varrho_{0,n-1}$ mittels der Gleichungen

$$\begin{aligned} \varrho_0 &= r_0 + n - m, \\ \varrho_{n-1} &= r_{m-1} + n - m, \\ \varrho_{0,n-1} &= r_{0,m-1} + (n-m)(r_0 + r_m + n - m - 1) \end{aligned}$$

mit r_0, r_{m-1}, $r_{0,m-1}$ zusammenhängen. Von diesen drei Gleichungen folgen die erste und zweite aus der Bemerkung, daß bei der wiederholten Pyramidenbildung jeder neue Scheitel die Zahl der Ecken und der Grenzräume höchster Dimensionenzahl um die Einheit steigert. Und die dritte wird folgendermaßen gefunden. Es gibt zwei verschiedene Gruppen von Grenzräumen R_{n-1}, nämlich Grundräume und Scheitelräume. Die ersteren enthalten alle Ecken des $(Po)_m$ und $n-m-1$ Scheitel, sind also $n-m$ an der Zahl, weil jedesmal ein Scheitel ausgeschlossen bleibt; die letzteren durch alle $n-m$ Scheitel und einen Grenzraum R_{m-1} von $(Po)_m$ sind r_m an der Zahl. Von diesen beiden Gruppen liefert die erste $(n-m)(r_0 + n - m - 1)$, die zweite $r_{0,m-1} + (n-m)r_m$ Einheiten für $\varrho_{0,n-1}$. Die Lösung dieser Gleichungen nach r_0, r_{m-1}, $r_{0,n-1}$ gibt

$$\begin{aligned} r_0 &= \varrho_0 - (n-m), \\ r_{m-1} &= \varrho_{n-1} - (n-m), \\ r_{0,m-1} &= \varrho_{0,n-1} - (n-m)(\varrho_0 + \varrho_{n-1} - n + m - 1). \end{aligned}$$

Deshalb findet man schließlich

$$c = n(\varrho_0 + \varrho_{n-1}) - \varrho_{0,n-1} - (n+1)_2, \tag{15}$$

d. h. die Pyramide $Py[(Po)_m, S(n-m)]$ verhält sich rücksichtlich der Konstantenzahl wie ein beliebiges Polytop, sobald das Grundpolytop dies tut.

b) *Prismen.* Ein Prisma $Pr[(Po)_m, RV(n-m)]$ ist bestimmt, wenn man das Grundpolytop $(Po)_m$ im Raume R_m und die Lage der nicht im R_m liegenden Endpunkte der $n-m$ durch irgend eine Ecke von $(Po)_m$ gehenden Kanten in bezug auf $(Po)_m$ und zueinander kennt; d. h. man hat bei diesem Prisma wie bei obiger Pyramide

$$c = m(r_0 + r_{m-1}) - r_{0,m-1} - (m+1)_2 + \tfrac{1}{2}(n-m)(n+m+1).$$

Im Gegensatze zu den obigen Formeln findet man aber hier

$$\begin{aligned} \varrho_0 &= 2^{n-m} r_0 , \\ \varrho_{n-1} &= r_{m-1} + 2(n-m) , \\ \varrho_{0,n-1} &= 2^{n-m}[r_{0,m-1} + (n-m) r_0] . \end{aligned}$$

Denn bei der wiederholten Prismenbildung verursacht jeder neue Radiusvektor eine Verdoppelung der Eckenzahl und eine Vermehrung der Grenzräume höchster Dimensionenzahl um zwei. Und in $\varrho_{0,n-1}$ rührt die Zahl $2^{n-m} r_{0,m-1}$ von den Seitengrenzräumen, die Zahl $(n-m)2^{n-m} r_0$ von den Grundgrenzräumen her. Aus diesen Gleichungen findet man umgekehrt

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{1}{2^{n-m}} \varrho_0 , \\ r_{m-1} &= \varrho_{n-1} - 2(n-m) , \\ r_{0,m-1} &= \frac{1}{2^{n-m}} [\varrho_{0,n-1} - (n-m)\varrho_0] , \end{aligned}$$

und deshalb

$$\begin{aligned} c = \frac{1}{2^{n-m}} (n\varrho_0 - \varrho_{0,n-1}) + m\varrho_{n-1} \\ + \tfrac{1}{2}(n-m)(n-3m+1) - (m+1)_2 , \end{aligned}$$

d. h. das Prisma verhält sich hinsichtlich seiner Konstantenzahl *niemals* wie ein beliebiges Polytop.

c) *Parallelotope.* Ein n-dimensionales Parallelotop ist bestimmt durch das n-dimensionale n-Kant der in einer Ecke zusammentretenden Kanten; weil dies beim Simplex auch der Fall ist, so muß die Konstantenzahl des Parallelotopes jener des $S(n+1)$ gleich und also $(n+1)_2$ sein.

d) *Zwischenformen von Pyramiden und Prismen.* Werden auf das Polytop $(Po)_m$ von R_m mit den kennzeichnenden

Zahlen r_0, r_{m-1}, $r_{0,m-1}$ die beiden Prozesse $P(Py)$ und $P(Pr)$ von Pyramiden- und Prismenbildung in beliebiger Reihenfolge im ganzen $(n-m)$-mal angewendet, so erhält man im R_n allemal ein Polytop mit der Konstantenzahl

$$c = m(r_0 + r_{m-1}) - r_{0,m-1} - (m+1)_2 + \tfrac{1}{2}(n-m)(n+m+1).$$

Denn von diesen Prozessen steigern, wie wir fanden, der erste, zweite, dritte, usw. die Konstantenzahl immer um $(m+1)$, $(m+2)$, $(m+3)$, usw. unabhängig davon, ob irgend einer dieser Prozesse ein $P(Py)$ oder ein $P(Pr)$ ist. Wir nannten diese Polytope *Zwischenformen*, obgleich zugegeben werden muß, daß das Endergebnis eine Pyramide oder ein Prisma ist, je nachdem die letzte Operation ein $P(Py)$ oder ein $P(Pr)$ ist. Natürlich läßt sich die Zahl c nur dann in der Hauptform (15) schreiben, wenn dies bei $(Po)_m$ von R_m der Fall ist und alle Prozesse Prozesse $P(Py)$ sind, d. h. wenn das Resultat keine Zwischenform ist.

e) *Pyramidenstumpf, abgestumpfte Pyramide und Pyramidenkeil.* Wird eine einfache Pyramide im R_n von einem Raume R_{n-1} geschnitten, so sind, wie früher [18₃] bemerkt wurde, zwei Fälle zu unterscheiden. Hat der Schnittraum keinen Punkt mit dem Grundpolytope der Pyramide gemein, so teilt sich die letztere in eine neue Pyramide und einen Pyramidenstumpf; schneidet dieser Raum R_{n-1} hingegen das Grundpolytop $(Po)_{n-1}$ in einem $(Po)_{n-2}$, so entstehen eine abgestumpfte Pyramide und ein Pyramidenkeil.

Aus der Bemerkung, daß der Schnittraum durch n auf bestimmten Kanten liegende Punkte bestimmt wird, ergibt sich, wenn r_0, r_{n-2}, $r_{0,n-2}$ sich wieder auf dem Grundpolytope beziehen, für die Konstantenzahl des Pyramidenstumpfes und der abgestumpften Pyramide

$$c = (n-1)(r_0 + r_{n-2}) - r_{0,n-2} - \tfrac{1}{2}n(n-5).$$

Allein beim Pyramidenkeile kann c kleiner sein. Ist der dem Keile anheimfallende Teil α der Basis durch die Zahlen r'_0, r'_{n-2}, $r'_{0,n-2}$ gekennzeichnet, so findet man

$$c = (n-1)(r'_0 + r'_{n-2}) - r'_{0,n-2} - \tfrac{1}{2}(n^2 - 3n - 2);$$

denn ein Pyramidenkeil mit den $(n-1)$-dimensionalen Polytopen α, β, welche das begrenzende $(n-2)$-dimensionale Polytop (α, β) gemein haben, ist bekannt, wenn man α hat, auf α die Begrenzung (α, β) angewiesen ist, bei irgend einer

außerhalb (α, β) liegenden Ecke A von α der entsprechende Eckpunkt B von β angenommen wird, und irgend ein bestimmter Punkt S von AB als Scheitel auftreten soll.

f) *Prismenstumpf, gebrochenes Prisma und Prismenkeile.* Trifft der Schnittraum nur die Mantelkanten, so entstehen zwei Prismenstümpfe, deren Konstantenzahl gefunden wird, indem man die um die Einheit (die Länge der Mantelkanten) verkleinerte Konstantenzahl des Prismas mit n (die den Schnittraum bestimmenden Größen) vermehrt. Also hat man

$$c = (n-1)(r_0 + r_{n-2}) - r_{0,n-2} - \tfrac{1}{2}(n^2 - 5n + 2).$$

Trifft der Schnittraum eines der beiden Grundpolytope, so entstehen ein gebrochenes Prisma und ein scharfer Prismenkeil. Für das gebrochene Prisma findet man wie bei der abgestumpften Pyramide

$$c = (n-1)(r_0 + r_{n-2}) - r_{0,n-2} - \tfrac{1}{2}n(n-5);$$

für den scharfen Prismenkeil ist c um eine Einheit kleiner als die Konstantenzahl des Pyramidenkeiles und also

$$c = (n-1)(r'_0 + r'_{n-2}) - r'_{0,n-2} - \tfrac{1}{2}n(n-3),$$

weil der Scheitel S der uneigentliche Punkt der Kante AB ist und deshalb nicht mehr bestimmt zu werden braucht.

Trifft der Schnittraum beide Grundpolytope, so entstehen zwei stumpfe Prismenkeile; auf die hierbei möglichen Fälle gehen wir aber nicht ein.

g) *Hufe.* Wir betrachten einen Huf mit den zwei einander isomorph verwandten $(n-1)$-dimensionalen Grenzpolytopen α, β, dem ihnen gemeinsamen $(n-2)$-dimensionalen Polytope (α, β) und den außerhalb (α, β) liegenden Paaren (A_i, B_i) einander entsprechender Punkte, wobei i die Werte $1, 2, \ldots, k$ durchlaufen mag, und setzen voraus, daß α gegeben vorliegt, (α, β) auf α angewiesen worden ist, und man außerdem den Punkt B_1 von β willkürlich angenommen hat, um sodann zu zeigen, daß der Huf durch höchstens $k-1$ weitere Größen bestimmt werden kann. Weil es nämlich, dem Charakter des Hufes zufolge, immer möglich sein muß, zwei einander entsprechende Kanten der Polytope α, β durch eine Seitenfläche zu verbinden, so schneiden diese Kanten den Raum R_{n-2} der Basis (α, β) im nämlichen Punkte;

schneidet eine Kante $A_1 A_2$ von α diesen R_{n-2} im Punkte $C_{1,2}$, so muß B_2 also auf der Gerade $B_1 C_{1,2}$ angenommen werden. Und hieraus läßt sich, vom einen Punkte B_1 zu allen anderen Punkten B_i fortschreitend, ableiten, daß man für jeden neuen Punkt B höchstens eine einzige Größe, für die Gruppe der $k-1$ Punkte $B_2, B_3, \ldots, B_k$ also höchstens $k-1$ Größen willkürlich annehmen kann. Hierdurch ist dann, wenn nicht die Konstantenzahl selbst, doch wenigstens eine obere Grenze für diese Zahl gefunden.

h) *Prismoide.* Ein Prismoid mit den in zwei parallelen Räumen R_{n-1} liegenden Polytopen α, β ist bekannt, wenn α gegeben ist und man in einem in gegebener Entfernung zum Raume $R^{(a)}_{n-1}$ von α parallelen Raume $R^{(b)}_{n-1}$ das zweite Polytop β mit Inbegriff seiner Lage willkürlich angenommen hat. Weil die Angabe, wie die Ecken von α mit denen von β verbunden werden sollen, keinen Einfluß hat auf die Konstantenzahl, so findet man

$$c = (n-1)(r'_0 + r''_0 + r'_{n-2} + r''_{n-2}) - (r'_{0,n-2} + r''_{0,n-2}) - \tfrac{1}{2}(n+1)(n-2),$$

wo r'_0, r'_{n-2}, $r'_{0,n-2}$ sich auf α und r''_0, r''_{n-2}, $r''_{0,n-2}$ sich auf β beziehen.

Aufgabe 40. Von einem Prismoid sind alle begrenzenden Polytope Simplexe $S(n)$; bestimme die Konstantenzahl.

[Man findet aus den beiden Beziehungen

$$(n-1)(r_0 + r_{n-2}) - r_{0,n-2} = n(n-1),$$

wo alle r entweder einmal oder zweimal gestrichen sind, unmittelbar

$$c = 2n(n-1) - \tfrac{1}{2}(n+1)(n-2) = \tfrac{3}{2}n(n-1) + 1.]$$

i) *Simplotope.* Das Simplotop $S_t(p, n-p)$, welches durch die parallele Bewegung des Simplex $O(A_1 A_2 \ldots A_p)$ erzeugt wird, wenn der Punkt O dabei nach und nach mit allen Punkten des Simplex $O(A_{p+1} A_{p+2} \ldots A_n)$ zusammenfällt, ist bestimmt, wenn man das Simplex $O(A_1 A_2 \ldots A_n)$ kennt; also hat man $c = (n+1)_2$ wie beim Simplex $S(n+1)$.

28. Kongruenz und Ähnlichkeit der Polytope. Zwei im Operationsraume R_n liegende Polytope $(Po)_n$ und $(Po)'_n$ werde

positiv kongruent genannt, wenn $(Po)'_n$ durch Bewegung im R_n mit $(Po)_n$ zur Deckung gebracht werden kann; hingegen heißen sie negativ kongruent, wenn $(Po)'_n$ mittels dieser Bewegung in eine in bezug auf einen Raum R_{n-1} im R_n zu $(Po)_n$ symmetrische Lage gelangen kann. Oder aber $(Po)_n$ und $(Po)'_n$ sind positiv oder negativ kongruent, wenn sie einander entsprechende Teile bilden von positiv oder negativ kongruenten Systemen C_n, C'_n im R_n.

Deshalb gilt der allgemeine Satz:

„Zwei beliebige Polytope $(Po)_n$ und $(Po)'_n$ mit den Eckpunktengruppen $(A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots, A_{n+p})$ und $(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n, A'_{n+1}, \ldots, A'_{n+p})$ sind kongruent, wenn das Simplex $S(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$ mit jedem der p übrigen Eckpunkte A' Simplexe $S'(n+1)$ bestimmt, welche der Reihe nach in der nämlichen Weise kongruent sind den p vom Simplex $S(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ mit jedem der p übrigen Punkte A gebildeten Simplexen $S(n+1)$. Und die Kongruenz der zwei Polytope ist eine positive oder negative, je nachdem die einander entsprechenden Simplexe $S'(n+1)$ und $S(n+1)$ positiv oder negativ kongruent sind."

Ersetzt man in diesem Satze das Prädikat „kongruent" überall durch „ähnlich", so erhält man einen ebenso allgemeinen Satz für die Ähnlichkeit zweier Polytope.

Auch hat man die Sätze:

„Zwei Polytope $(Po)_n$ und $(Po)'_n$ sind kongruent, sobald für beide das nämliche eindeutige Bestimmungssystem vorliegt und dies bei der Konstruktion beider Polytope auf dieselbe Weise angewandt wird."

„Verwendet man irgend ein eindeutiges Bestimmungssystem eines gegebenen Polytopes $(Po)_n$ zur Konstruktion eines zweiten, nachdem man alle in diesem Systeme vorkommenden Strecken im nämlichen Verhältnisse vergrößert oder verkleinert hat, so erhält man ein zu $(Po)_n$ ähnliches Polytop $(Po)'_n$.

Um uns nicht in Allgemeinheiten zu verlieren, brechen wir diese Betrachtungen hier ab; nur heben wir in den nächsten Nummern noch einige besondere Eigenschaften von Parallelotopen, Pyramiden und Prismen ausdrücklich hervor.

29. Die Diagonalen des Parallelotopes. Das Parallelotop $(Pa)_n$ im R_n wird von n Paaren paralleler Räume R_{n-1} be-

grenzt. Wählt man aus jedem dieser n Paare einen Raum R_{n-1}, so erhält man n dieser Räume, welche sich in einem bestimmten Eckpunkt A des $(Pa)_n$ schneiden; ersetzt man diese n Räume R_{n-1} durch die n übrigen, so erhält man in der nämlichen Weise einen zweiten Eckpunkt A', welcher der Gegeneckpunkt von A heißen mag. Und versteht man nun künftighin unter Diagonale des $(Pa)_n$ ausschließlich die den von $(Pa)_n$ eingenommenen Teil des R_n durchsetzenden Verbindungslinien zweier Gegeneckpunkte, so gelten allgemein die zwei folgenden Sätze:

„Irgend zwei Diagonalen des Parallelotopes halbieren einander."

„Die Summe der Quadrate aller Diagonalen des Parallelotopes ist der Summe der Quadrate aller Kanten gleich."

Der geometrische Ort der Punkte, welche von irgend zwei zueinander parallelen Grenzräumen R_{n-1} eines $(Pa)_n$ gleichweit entfernt sind, ist ein Raum R_{n-1}, welcher die Mittelpunkte aller Diagonalen enthalten muß; deshalb ist der Schnittpunkt O der n den verschiedenen Paaren paralleler Grenzräume R_{n-1} entsprechenden geometrischen Örter R_{n-1} der gemeinschaftliche Mittelpunkt aller Diagonalen. Dieser Punkt wird der *Mittelpunkt* des $(Pa)_n$ genannt; er ist zu gleicher Zeit der Schwerpunkt gleicher in den Eckpunkten des $(Pa)_n$ liegender Massen.

Der zweite der beiden obigen Sätze kann wieder mittels der Schlußweise von p auf $p+1$ bewiesen werden. Sind nämlich O_p und A, A' Mittelpunkt und ein Paar Gegenecken eines $(Pa)_p$ und wird dieses Polytop mit den Kantenlängen $a_1, a_2, \ldots, a_p$ in einer nicht in seinem Raume R_p enthaltenen Richtung um eine Strecke a_{p+1} verschoben, so wird der Mittelpunkt O_{p+1} des dadurch erzeugten Parallelotopes $(Pa)_{p+1}$ gefunden als zweiter Endpunkt des von O_p ausgehenden in dieser Richtung verlaufenden Vektors mit der Länge $\frac{1}{2}a_{p+1}$. Deshalb gibt der Satz der Schwerlinie $O_p O_{p+1}$ im Dreieck $AA'O_{p+1}$

$$AO_{p+1}^2 + A'O_{p+1}^2 = 2AO_p^2 + \tfrac{1}{2}a_{p+1}^2 . \tag{16}$$

Wird nun vorausgesetzt, der zu beweisende Diagonalsatz gelte schon für das $(Pa)_p$, so hat man

$$2^{p-1}\sum_{i=1}^{p} a_i^2 = D_p\,, \tag{17}$$

wo D_p gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen des $(Pa)_p$ ist. Weil nun die Summation von (16) über alle 2^{p-1} Diagonalen von $(Pa)_p$ nach Multiplikation mit vier die Beziehung

$$D_{p+1} = 2\,D_p + 2^p\,a_{p+1}^2$$

liefert, wo D_{p+1} die Summe der Quadrate der Diagonalen des $(Pa)_{p+1}$ bezeichnet, so ergibt sich mittels Substitution des Wertes von D_p aus (17)

$$2^p\sum_{i=1}^{p+1} a_i^2 = D_{p+1}\,,$$

welche Beziehung aussagt, daß der zu beweisende Satz für das $(Pa)_{p+1}$ gilt, wenn er für das $(Pa)_p$ gilt; weil er Geltung hat für das Parallelogramm, so gilt er allgemein für das $(Pa)_n$.

Weiter gilt der allgemeine Satz:

„Das Parallelotop ist eindeutig bestimmt, wenn man die Länge der Kanten und Diagonalen kennt und überdies angegeben wird, wie die Diagonalen sich hinsichtlich jeder Kantenrichtung in an der nämlichen Kante endigenden Paare ordnen.“

Man beweist nämlich leicht, daß die im Satze genannten Größen zur Kenntnis der Länge des Abstandes irgend zweier Eckpunkte des $(Pa)_n$ führen. Denn die Anwendung des Quadratsatzes auf jedes Parallelogramm, von welchem zwei parallele Seiten zwei Gegenkanten von $(Pa)_n$ sind, liefert die Längen aller Diagonalen aller begrenzenden $(Pa)_{n-1}$, und kennt man von diesen letzteren Grenzgebilden die Längen der Kanten und Diagonalen, so gelangt man in der nämlichen Weise zur Kenntnis der Diagonalen aller begrenzenden $(Pa)_{n-2}$, usw.

In Verbindung mit der bekannten Konstantenzahl $(n+1)_2$ des $(Pa)_n$ ergibt sich nun unmittelbar, daß außer den n voneinander unabhängigen Größen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ innerhalb der von Ungleichungen herrührenden Grenzen $(n)_2$ der 2^{n-1} Diagonalen willkürlich angenommen werden können. Somit bestehen bei einem $(Pa)_n$ mit gegebenen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zwischen den Diagonalen außer dem Quadratsatze noch

$2^{n-1} - (n)_2 - 1$ Beziehungen. Und diese Beziehungen sind homogen in den Diagonalen; denn die Betrachtung ähnlicher Parallelotope lehrt, daß nur die Längenverhältnisse in diesen Beziehungen auftreten können. Es enthält folgende kleine Tabelle von $n = 4$ bis $n = 12$ die Zahl s dieser homogenen Gleichungen

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12
s	1	5	16	42	99	219	466	968	1981

Wir weisen diese Beziehungen in den einfachsten Fällen nach.

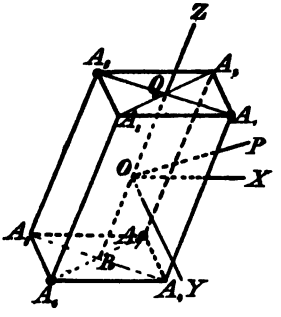


Fig. 27.

Die einzige homogene Beziehung zwischen den acht Diagonalen eines $(Pa)_4$ wird leicht abgeleitet. Verteilt man nämlich die acht Eckpunkte $A_1, A_2, \ldots, A_8$ eines Parallelepipeds (Fig. 27) so in zwei Gruppen (A_1, A_5, A_6, A_7) und (A_2, A_3, A_4, A_8), daß keine zwei Punkte der nämlichen Gruppe Endpunkte der nämlichen Kante sind, so gilt für irgend einen Punkt P eines diesen Körper enthaltenden Raumes R_4 die Beziehung

$$(18) \quad \begin{cases} A_1P^2 + A_5P^2 + A_6P^2 + A_7P^2 \\ = A_2P^2 + A_3P^2 + A_4P^2 + A_8P^2 . \end{cases}$$

Ist nämlich Q der Schnittpunkt von A_1A_5, A_2A_8 und R der Schnittpunkt von A_6A_7, A_4A_8, und wird der Mittelpunkt der Strecke QR als Mittelpunkt des Parallelepipeds wieder mit O bezeichnet, so hat man, wenn die Kantenlängen von A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 gleich a_2, a_3, a_4 gesetzt werden, der Reihe nach

$$\begin{aligned} A_1P^2 + A_5P^2 &= 2PQ^2 + \tfrac{1}{2}A_1A_5^2 , \\ A_6P^2 + A_7P^2 &= 2PR^2 + \tfrac{1}{2}A_6A_7^2 , \\ 2(PQ^2 + PR^2) &= 4OP^2 + a_4^2 , \\ \tfrac{1}{2}(A_1A_5^2 + A_2A_3^2) &= a_2^2 + a_3^2 . \end{aligned}$$

Also gibt die Addition, weil $A_2A_8 = A_6A_7$ ist,

$$A_1P^2 + A_5P^2 + A_6P^2 + A_7P^2 = 4OP^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$$

und findet man leicht für $A_2P^2 + A_3P^2 + A_4P^2 + A_8P^2$ denselben Wert, womit die Beziehung (18) bewiesen ist. Und aus dieser Gleichung ergibt sich dann mittels Multiplikation mit vier eine Beziehung zwischen den acht Diagonalen eines $(Pa)_4$, welches $A_1, A_2, \ldots, A_8$ zu acht der sechzehn Ecken und P zum Mittelpunkte hat. Nennt man zwei Eckpunkte eines Parallelepipeds „benachbart", falls sie durch eine Kante verbunden sind, so kann man die zwei oben angegebenen Gruppen „Quadrupel nicht benachbarter Eckpunkte" nennen und, diese Bezeichnungsweise auf die Diagonalen des $(Pa)_4$ ausdehnend, von „zwei Quadrupel nicht benachbarter Diagonalen" des $(Pa)_4$ reden. Mittels dieser Ausdrucksweise erhält obige Beziehung die folgende Form:

„Die zwei Quadrupel nicht benachbarter Diagonalen eines $(Pa)_4$ liefern die nämliche Quadratsumme."

Aufgabe 41. Welchen stereometrischen Satz bildet (18), wenn P im Raume R_3 des Parallelepipeds liegt?

[Man vergleiche einen kleinen Aufsatz des Verfassers, Königl. Akad. der Wissenschaften, Amsterdam 1903, *Verslag*, Teil XI_2, S. 683].

Aufgabe 42. Wie groß ist die Quadratsumme der beiden Quadrupel bei einem $(Pa)_4$ mit den Kantenlängen a_1, a_2, a_3, a_4?

[Man findet $4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)$; weshalb?]

Sämtliche $2^{n-1} - (n)_2 - 1$ Beziehungen lassen sich auf die Form (18) bringen. Dies wird uns am leichtesten gelingen, wenn wir die Bezeichnungsweise der Eckpunkte möglichst zweckmäßig wählen. Deshalb sind die Indizes der acht Eckpunkte A_i des Parallelepipeds (Fig. 27) in Beziehung gesetzt worden zu dem Koordinatensysteme, welches den Mittelpunkt O des $(Pa)_3$ zum Ursprunge und die Kantenrichtungen des $(Pa)_3$ zu Achsenrichtungen hat. Dabei erscheinen die Koordinaten der Eckpunkte sämtlich in der Form $(\pm\frac{1}{2}a_2, \pm\frac{1}{2}a_3, \pm\frac{1}{2}a_4)$ mit allen überhaupt möglichen Zeichenkombinationen, und nun bestimmen diese Kombinationen in übersichtlicher Weise die Indizes nach dem Schema

$$+++\ldots A_1 \left|\begin{matrix} -++\ldots A_2 \\ +-+\ldots A_3 \\ ++-\ldots A_4 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} --+\ldots A_5 \\ -+-\ldots A_6 \\ +--\ldots A_7 \end{matrix}\right| ---\ldots A_8$$

Dabei sind dann zwei Gegenecken immer durch die Summe 2^3+1 ihrer Indizes miteinander verknüpft und ergibt sich eine Verschärfung der Andeutung der beiden Quadrupel (A_1, A_5, A_6, A_7) und (A_2, A_3, A_4, A_8), indem den Eckpunkten des ersten eine gerade, den Eckpunkten des zweiten eine ungerade Anzahl von Minuszeichen entspricht.

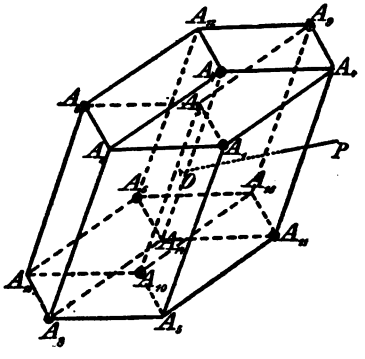


Fig. 28.

Wir gehen zum Falle $n=5$ über, wo die doppelten Entfernungen eines Punktes P des Raumes R_5 von den sechzehn Eckpunkten A_i (Fig. 28) eines $(Pa)_4$ mit dem Mittelpunkte O als Diagonalen des $(Pa)_5$ auftreten, und geben nun sofort an, daß die Indizes der Eckpunkte in Verbindung mit dem Koordinatensysteme mit O als Ursprung und den Kantenrichtungen zu Achsenrichtungen gewählt worden sind nach dem Schema

$++++\ldots 1$	$--++\ldots 6$	$---+\ldots 12$
	$-+-+\ldots 7$	$--+-\ldots 13$
$-+++\ldots 2$	$-++-\ldots 8$	$-+--\ldots 14$
$+-++\ldots 3$	$+--+\ldots 9$	$+---\ldots 15$
$++-+\ldots 4$	$+-+-\ldots 10$	
$+++-\ldots 5$	$++--\ldots 11$	$----\ldots 16$

Hier wird die Summe der Indizes zweier Gegenecken 2^4+1, und teilt sich das System der sechzehn Eckpunkte in zwei Oktupel nicht benachbarter Punkte

$$(1-6, 7, 8, 9, 10, 11-16),\ (2, 3, 4, 5-12, 13, 14, 15).$$

Das Parallelotop $(Pa)_4$ mit dem allgemeineren Polytopsymbole (16, 32, 24, 8) hat 12 Paare einander gegenüber-

liegender Seitenflächen und 4 Paare einander gegenüberliegender Grenzparallelepipede. Aus beiden Gattungen von Grenzgebilden lassen sich die fünf Diagonalbeziehungen des $(Pa)_5$ ableiten. Fangen wir mit den Seitenflächen an, so muß hervorgehoben werden, daß irgend zwei Gegenflächen $(A_1 A_2 A_6 A_8)$ $(A_{14} A_{11} A_{15} A_{16})$ des $(Pa)_4$ acht Eckpunkte des $(Pa)_5$ liefern, welche mit ihren Gegenecken in $(Pa)_5$ die sechzehn Eckpunkte eines $(Pa)_4$ bilden; schreibt man abkürzend die Gleichung (18) in der selbstverständlichen Form $(1, 5, 6, 7) = (2, 3, 4, 8)$, so findet man also hier $(1, 6, 14, 15) = (2, 3, 11, 16)$ und auf diese Weise führen die 12 Paare von Gegenflächen des $(Pa)_4$ zum Systeme

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{l} (1, 6, 14, 15) = (2, 3, 11, 16) \ldots (1), \\ (1, 7, 13, 15) = (2, 4, 10, 16) \ldots (2), \\ (1, 8, 12, 15) = (2, 5, 9, 16) \ldots (3), \\ (1, 9, 13, 14) = (3, 4, 8, 16) \ldots (4), \\ (1, 10, 12, 14) = (3, 5, 7, 16) \ldots (5), \\ (1, 11, 12, 13) = (4, 5, 6, 16) \ldots (6), \\ (2, 9, 10, 14) = (3, 7, 8, 15) \ldots (7), \\ (2, 9, 11, 13) = (4, 6, 8, 15) \ldots (8), \\ (2, 10, 11, 12) = (5, 6, 7, 15) \ldots (9), \\ (3, 7, 11, 13) = (4, 6, 10, 14) \ldots (10), \\ (3, 8, 11, 12) = (5, 6, 9, 14) \ldots (11), \\ (4, 8, 10, 12) = (5, 7, 9, 13) \ldots (12), \end{array}\right.$$

welche zwölf Gleichungen (19) wir in dieser Nummer zeitlich als (1), (2), .., (12) voneinander unterscheiden. Diese zwölf Gleichungen liefern aber nur vier voneinander unabhängige Beziehungen. Denn es ist zunächst

$$(1) - (2) = (10), \quad (1) - (4) = (8), \quad (2) - (3) = (12),$$
$$(1) - (3) = (11), \quad (1) - (5) = (9), \quad (2) - (4) = (7),$$

woraus hervorgeht, daß das zweite Sextupel sich aus dem ersten ableiten läßt. Und weiter hat man noch

$$(1) - (2) = (5) - (6)\,[= (10)], \quad (2) - (3) = (4) - (5)\,[= (12)].$$

Deshalb reduziert sich das System (19) auf die vier Gleichungen (1), (2), (3), (4) und muß es noch eine andere von diesen unabhängigen Beziehungen unabhängige Beziehung

geben. Wirklich findet man, immer wieder mittels des Satzes der Schwerlinie, das Theorem:

„Die zwei Oktupel nicht benachbarter Diagonalen des $(Pa)_5$ *liefern die nämliche Quadratsumme."*

Wirklich ist die Gleichung

$$(20)\qquad \begin{cases} A_1P^2 + A_6P^2 + \ldots + A_{16}P^2 \\ = A_2P^2 + A_3P^2 + \ldots + A_{15}P^2 \end{cases}$$

unabhängig von den Gleichungen (19); denn zwei Gegenecken des Grenzparallelotopes $(Pa)_4$ stehen bei den Gleichungen (19) immer auf verschiedenen Seiten, bei (20) immer auf der nämlichen Seite des Gleichheitszeichens.

Die vier Paare einander gegenüberliegender Grenzparallelotope $(Pa)_4$ liefern die acht Gleichungen

$$(21)\begin{cases} (1,\ 6,\ 7,\ 9) = (2,\ 3,\ 4,\ 12), & (8,\ 10,\ 11,\ 16) = (5,\ 13,\ 14,\ 15), \\ (1,\ 6,\ 8,\ 10) = (2,\ 3,\ 5,\ 13), & (7,\ 9,\ 11,\ 16) = (4,\ 12,\ 14,\ 15), \\ (1,\ 7,\ 8,\ 11) = (2,\ 4,\ 5,\ 14), & (6,\ 9,\ 10,\ 16) = (3,\ 12,\ 13,\ 15), \\ (1,\ 9,\ 10,\ 11) = (3,\ 4,\ 5,\ 15), & (6,\ 7,\ 8,\ 16) = (2,\ 12,\ 13,\ 14). \end{cases}$$

Weil die Addition der zwei Gleichungen der nämlichen Zeile immer wieder zu (20) zurückführt, so sind diese acht Gleichungen höchstens fünf voneinander unabhängigen Gleichungen equivalent. Und daß die Hinzufügung „höchstens" überflüssig ist, geht hieraus hervor, daß die Gleichungen (21) die Gleichungen (19) einschließen; denn man erhält die Gleichungen (19), wenn man jede der vier Gleichungen (21) links kombiniert mit den drei Gleichungen rechts, welche einer anderen Zeile angehören, usw.

In einem kleinen Aufsatze des Verfassers findet man die analoge Behandlung des Falles $n = 6$ (*Archives Teyler*, Haarlem, 1903, Reihe 2, Teil VIII, S. 395—405).

Schneiden die n in eine Ecke zusammenlaufenden Kanten eines $(Pa)_n$ sich paarweise senkrecht, so steht jede Kante senkrecht auf den zwei ihren uneigentlichen Punkt nicht enthaltenden Grenzräumen R_{n-1}, und bilden somit die Endpunkte zweier einander gegenüberliegender Kanten die Eckpunkte eines Rechtecks. Hieraus folgt dann weiter, daß irgend zwei benachbarte Diagonalen die nämliche Länge haben und dies also mit allen Diagonalen der Fall sein

muß. Ein solches Parallelotop möge kurzweg eine *Kiste* genannt und durch $(Ki)_n$ angedeutet werden.

Haben die Kanten einer Kiste sämtlich die nämliche Länge, so hat man es mit einem der regulären Polytope zu tun, von welchen in einem anderen Abschnitte gehandelt werden soll. Im Hinblick auf seine Anwendung bei Inhaltsbetrachtungen möge dieses reguläre Polytop vorläufig das *Maßpolytop* heißen.

30. Prismen und Pyramiden. Wir schalten hier noch einige einfache Bemerkungen über einfache Schnitte von n-dimensionalen Prismen und Pyramiden durch Räume R_{n-1} ein.

Ein einfaches Prisma mit dem Polytope $(Po)_{n-1}$ als Basis wird von einem R_{n-1} parallel zum Raume dieser Basis in einem zu $(Po)_{n-1}$ kongruenten und ähnlich liegenden $(Po)'_{n-1}$ geschnitten.

Das mehrfache Prisma $Pr[(Po)_m, RV(n-m)]$ wird von einem R_{n-1}, welcher sowohl zum Raume R_m von $(Po)_m$ wie zu $n-m-1$ der $n-m$ Radiivektores parallel ist, in einem $Pr[(Po)'_m, RV(n-m-1)]$ geschnitten, wobei $(Po)'_m$ wieder mit $(Po)_m$ kongruent und ähnlich liegend ist.

Eine einfache Pyramide mit dem Polytope $(Po)_{n-1}$ als Basis und dem Scheitel S wird von einem R_{n-1} parallel zum Raume R_m dieser Basis in einem zu $(Po)_{n-1}$ ähnlichen und ähnlich liegenden Polytope $(Po)'_{n-1}$ geschnitten. Sind h und h' die Abstände des Scheitels S vom Grundraum und vom Schnittraum, so verhalten sich die homologen Strecken der Polytope $(Po)_{n-1}$ und $(Po)'_{n-1}$ wie h und h'.

Wird die mehrfache Pyramide $Py[(Po)_m, S(n-m)]$ geschnitten durch einen Raum R_{n-1}, welcher sowohl zum Raume R_m der Basis $(Po)_m$ wie zum Raume R_{n-m-1} der $n-m$ Scheitel parallel ist, und sind h_1 und h_2 die Abstände dieser Räume R_m und R_{n-m-1} vom Schnittraume R_{n-1}, so ist der Schnitt ein Polytop, welches entsteht, indem man jeden Punkt eines bestimmten zu $(Po)_m$ im Verhältnis $\frac{h_1}{h_1+h_2}$ ähnlichen und ähnlich liegenden Polytopes $(Po)'_m$ ein zum Simplex $S(n-m)$ der $n-m$ Scheitel im Verhältnis $\frac{h_2}{h_1+h_2}$

ähnliches und ähnlich liegendes Simplex $S'(n-m)$ beschreiben läßt.

Aufgabe 43. In welchem Falle ist der Schnitt ein Simplotop?

---

§ 4. Inhaltsbetrachtungen.

31. Die Kiste. Die Grundlage der Betrachtungen über n-dimensionalen Inhalt bildet die Bemerkung, daß der von einem bestimmten Polytope $(Po)_n$ eingenommene Raum sich bei Bewegung des Polytopes weder vergrößert noch verkleinert, wenn dieses Polytop bei der Bewegung zu sich selbst kongruent bleibt. Also sind zwei Polytope $(Po)_n$, $(Po)'_n$, welche nacheinander das nämliche Raumstück auszufüllen imstande sind, inhaltsgleich; d. h. es gilt der Satz:

„Positiv kongruente Polytope sind inhaltsgleich."

Mit Hilfe dieses Satzes findet man sofort:

„Die Inhalte zweier gerader Prismen, deren Grundpolytope $(Po)_{n-1}$, $(Po)'_{n-1}$ kongruent sind, verhalten sich wie die Höhen."

Beim Beweise dieses Satzes, welcher dem des entsprechenden Satzes für dreidimensionale gerade Prismen ganz ähnlich ist, hat man zwei Fälle zu unterscheiden, den Fall zweier kommensurabler und den Fall zweier inkommensurabler Höhen; in bezug auf diesen Punkt kann also auf die Lehrbücher der Stereometrie verwiesen werden.

Aufgabe 44. Muß es im letzten Satze nicht heißen „deren Grundpolytope *positiv* kongruent sind?"

Weiter ergibt sich der Satz:

„Die Inhalte zweier Kisten verhalten sich wie die Produkte der Kantenlängen."

Schiebt man nämlich zwischen die gegebenen Kisten $(Ki)_n$, $(Ki)'_n$ mit den Kantensystemen $(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, k_n)$, $(l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}, l_n)$ eine Reihe von $n-1$ neuen Kisten $(Ki)_n^{(p)}$ mit den Kantensystemen

$(l_1, l_2, \ldots, l_p, k_{p+1}, \ldots, k_{n-1}, k_n)$, $(p = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$

ein, so kann zwischen den zwei Kisten der Paare

$$[(Ki)_n, (Ki)_n^{(1)}], \quad [(Ki)_n^{(1)}, (Ki)_n^{(2)}], \ldots,$$
$$[(Ki)_n^{(n-2)}, (Ki)_n^{(n-1)}], \quad [(Ki)_n^{(n-1)} (Ki)_n']$$

allemal der vorhergehende Prismensatz in Anwendung kommen und findet man, wenn I, I' die Inhalte der gegebenen Kisten und $I^{(p)}$ die Inhalte der Zwischenglieder sind,

$$\frac{I}{I^{(1)}} = \frac{k_1}{l_1}, \quad \frac{I^{(1)}}{I^{(2)}} = \frac{k_2}{l_2}, \quad \ldots, \quad \frac{I^{(n-2)}}{I^{(n-1)}} = \frac{k_{n-1}}{l_{n-1}}, \quad \frac{I^{(n-1)}}{I'} = \frac{k_n}{l_n};$$

folglich gibt die Multiplikation

$$\frac{I}{I'} = \frac{k_1 k_2 \ldots k_n}{l_1 l_2 \ldots l_n}. \tag{22}$$

Ist nun K' das Maßpolytop mit der Einheit zur Kantenlänge, und sind $k_1, k_2, \ldots, k_n$ die in der nämlichen Längeneinheit ausgedrückten Kanten von K, so ergibt sich, daß die Zahl der n-dimensionalen Volumeinheiten von K erhalten wird, wenn man die Zahlen der Längeneinheiten der n Kanten miteinander multipliziert; d. h. es gilt der Satz:

„Die Maßzahl des Inhalts I einer Kiste ist dem Produkte der Maßzahlen der Kanten gleich."

In diesem Falle geht (22) über in

$$I = k_1 k_2 \ldots k_n. \tag{23}$$

Da nun $k_1 k_2 \ldots k_{n-1}$ in derselben Weise den Inhalt der begrenzenden Kiste $(Ki)_{n-1}$ mit den Kantenlängen $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ angibt, wenn die Kiste betrachtet wird als ein gerades Prisma mit $(Ki)_{n-1}$ als Basis und k_n als Höhe, so hat man ebenfalls den Satz:

„Die Maßzahl des Inhalts I einer Kiste ist dem Produkte der Maßzahlen der Basis und der Höhe gleich."

Oder es ist, in leicht verständlicher Symbolik,

$$I = Bh; \tag{24}$$

diese Formel wird uns sofort nützlich sein.

Aus (22) folgt unmittelbar:

„Die Inhalte (Oberflächen) zweier ähnlicher Kisten verhalten sich wie die n-ten (n — 1-ten) Potenzen irgend zweier homologer Kanten."

Aufgabe 45. In welcher Zeit würde eine Kiste in der Form eines zehndimensionalen Metermaßpolytopes ausgefüllt sein, wenn man jede Zeitsekunde einen Stein von der Größe eines zehndimensionalen Dezimetermaßpolytopes hineinlegte?

[In etwa 317 Jahr.]

32. Der Projektionssatz. Wir beweisen nun sogleich folgenden allgemeinen Satz:

„Man erhält den Inhalt der senkrechten Projektion irgend eines Teiles T eines Raumes R_p auf irgend einen anderen Raum R_q, $(q \geqq p)$, welcher zu R_p windschief ist oder mit R_p einen Raum R_r, $(r \leqq p)$, gemein hat, indem man den Inhalt von T mit dem Produkte der Cosinus der p oder der $p-r$ Winkel zwischen R_p und R_q multipliziert."

Beim Beweise dieses Satzes, dem wir den Namen „Projektionssatz" beilegen wollen, haben wir auf verschiedene früher behandelte Theoreme zurückzugreifen. Mit Ausnahme des hier auszuschließenden Falles, wo die Räume R_p und R_q einen Orthogonalitätsgrad aufweisen, ist die Projektion T' von T ein Stück des Raumes R'_p, welcher die Projektion von R_p auf R_q bildet ($\mathrm{I}\,44_7$), und also wieder eine p-dimensionale Größe. Weil parallele Begrenzungselemente sich als parallele Begrenzungselemente projizieren ($\mathrm{I}\,44_{11}$), so wird T' ein Parallelotop sein, wenn T dies ist. Wir zeigen nun zunächst, daß es möglich ist, eine im R_p gegebene Kiste in diesem Raume so aufzustellen, daß ihre Projektion auf R_q wieder eine Kiste ist. Wird R_q parallel zu sich selbst nach irgend einem Punkte O von R_p verschoben, und sind sodann ($\mathrm{I}\,48$) die zueinander senkrechten Geraden $OA_1, OA_2, \ldots, OA_{p-r}$ von R_p und die ebenfalls zueinander senkrechten Geraden $OA'_1, OA'_2, \ldots, OA'_{p-r}$ von R_q die Schenkel der $p-r$ von R_p und R_q im Punkte O gebildeten Winkel $A_1OA'_1, A_2OA'_2, \ldots, A_{p-r}OA'_{p-r}$, welche $u_1, u_2, \ldots, u_{p-r}$ heißen mögen, so hat man die im R_p gegebene Kiste $(Ki)_p$ nur so aufzustellen, daß $p-r$ der p in der nämlichen Ecke zusammenlaufenden Kanten zu den $p-r$ Geraden $OA_1, OA_2, \ldots, OA_{p-r}$ parallel werden, um das gesteckte Ziel zu erreichen; denn in diesem Falle sind die Projektionen dieser $p-r$ Kanten der Reihe nach zu $OA'_1, OA'_2, \ldots, OA'_{p-r}$ parallel und bleiben die Richtungen der r übrigen

Kanten durch diesen Eckpunkt in der Projektion ungeändert, weil sie dem gemeinschaftlichen Raume R_r von R_p und dem verschobenen Raume R_q angehören. Sind nun $a_1, a_2, \ldots, a_p$ die entsprechenden Kantenlängen von K_p, und haben die Strecken $a'_1, a'_2, \ldots, a'_p$ die nämliche Bedeutung für die Projektion K'_p, so hat man

$$a'_1 = a_1 \cos u_1, \quad a'_2 = a_2 \cos u_2, \quad \ldots, \quad a'_{p-r} = a_{p-r} \cos u_{p-r},$$
$$a'_{p-r+1} = a_{p-r+1}, \quad \ldots, \quad a'_p = a_p,$$

und deshalb findet man

$$I' = a'_1 a'_2 \ldots a'_p = a_1 a_2 \ldots a_p \cos u_1 \cos u_2 \ldots \cos u_{p-r}$$

oder

$$I' = I \cos u_1 \cos u_2 \ldots \cos u_{p-r}. \tag{25}$$

Und nun ergibt sich in bekannter Weise, daß diese Beziehung zwischen irgend einem Stücke T des Raumes R_p und seiner Projektion T' auf R_q besteht, mittels Zerlegung von T in kleine Kisten von der angewiesenen Stellung, und Einschließung von T zwischen zwei sich allmählich nähernden aus solchen Kistchen gebildeten ein- und umgeschriebenen Polytopen.

33. Das Parallelotop. Der Schläflische Projektionssatz. Wir beweisen zunächst, daß die Formel (24) auf das Parallelotop angewendet werden darf, und vergleichen dazu miteinander erstens die Inhalte zweier Parallelotope $(Pa)_n$ und $(Pa)'_n$, welche das nämliche Parallelotop $(Pa)_{n-1}$ zur Basis haben, für welche die diesem Parallelotope gegenüberliegenden Parallelotope im nämlichen Raume R'_{n-1} liegen und in diesem Raume also kongruente und ähnlich liegende Gebilde sind, für welche aber die die Basisecken mit den im R'_{n-1} liegenden Ecken verbindenden Kanten beim $(Pa)_n$ senkrecht stehen auf R'_{n-1} und beim $(Pa)'_n$ zu diesem Raume schief geneigt sind. Zu diesem Zwecke erinnern wir (Fig. 29) an den einfachsten Fall $n = 2$ vom Rechteck $ABCD$ und Parallelogramm $A'BCD'$, wo man die kongruenten Dreiecke ABA' und DCD' der Reihe nach vom rechtwinkligen Trapez $ABCD'$ subtrahiert; ebenso erwähnen wir den nächstfolgenden Fall

$n = 3$, wo das Ziel mittels einer Zwischenform nach zweimaliger Anwendung des obigen Verfahrens erreicht wird. Also liegt die Vermutung nahe, daß man bei der Vergleichung von $(Pa)_n$ mit $(Pa)'_n$ eine Anzahl von $n-2$ Zwischenformen $(Pa)_n^{(1)}, (Pa)_n^{(2)}, \ldots, (Pa)_n^{(n-2)}$ braucht und das Subtraktionsverfahren $(n-1)$-mal anzuwenden hat. Allerdings wird die

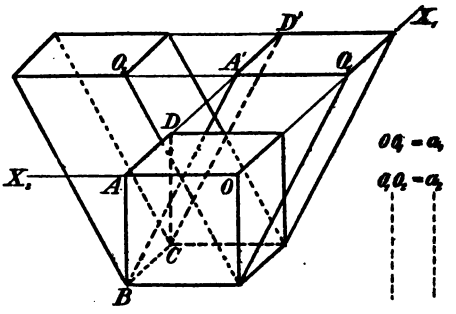


Fig. 29.

Angabe der Lage der dem gemeinschaftlichen Basisparallelotope $(Pa)_{n-1}$ in $(Pa)_n$, $(Pa)'_n$ und den $n-2$ $(Pa)_n^{(\sigma)}$ gegenüberliegenden, zu $(Pa)_{n-1}$ kongruenten und ähnlich liegenden Grenzparallelotope $(\overline{Pa})_{n-1}$, $(\overline{Pa})'_{n-1}$ und $(Pa)_{n-1}^{(\sigma)}$ mit Hilfe eines Koordinatensystems erleichtert. Sind nämlich $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ die Koordinaten einer Ecke O' von $(\overline{Pa})'_{n-1}$ in bezug auf das Koordinatensystem im gemeinschaftlichen Raume R'_{n-1} von $(\overline{Pa})_{n-1}$, $(\overline{Pa})'_{n-1}$ und $(Pa)_{n-1}^{(\sigma)}$, für welches der zu O' homologe Eckpunkt O von $(\overline{Pa})_{n-1}$ der Ursprung und die durch O gehenden Kanten von $(\overline{Pa})_{n-1}$ die Achsen sind, so werden die Zwischenformen dadurch bestimmt, daß

$$(a_1, 0, \ldots, 0, 0), (a_1, a_2, \ldots, 0, 0), \ldots, (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, 0)$$

die Koordinaten der diesen Punkten O, O' von $(\overline{Pa})_{n-1}$, $(\overline{Pa})'_{n-1}$ homologen Punkte $O_1, O_2, \ldots, O_{n-2}$ von $(Pa)_{n-1}^{(1)}, (Pa)_{n-1}^{(2)}, \ldots, (Pa)_{n-1}^{(n-2)}$ angeben. Werden nun die Zwischenformen zwischen $(Pa)_n$ und $(Pa)'_n$ eingeschaltet, so ergibt sich, daß irgend zwei Nachbarglieder der Kette

$$(Pa)_n, (Pa)_n^{(1)}, (Pa)_n^{(2)}, \ldots, (Pa)_n^{(n-2)}, (Pa)'_n$$

betrachtet werden können als das Resultat, welches erhalten wird, wenn man nacheinander zwei kongruente und ähnlich liegende Prismen $Pr[\text{Dreieck}, RV(n-2)]$ subtrahiert von dem nämlichen Prisma $Pr[\text{Trapez}, RV(n-2)]$. Also sind $(Pa)_n$ und $(Pa)'_n$ inhaltsgleich.

Mittels des nun bewiesenen Hilfssatzes ist nun weiter leicht anzugeben, wie man ein gegebenes Parallelotop $(Pa)_n$ mit der Basis $B = (Pa)_{n-1}$ und der Höhe h umbildet in eine inhaltsgleiche Kiste $(Ki)_n$ mit einer zu $B = (Pa)_{n-1}$ inhaltsgleichen Basis $B' = (Ki)_{n-1}$ und der Höhe h. Hat man nämlich das oben beschriebene Verfahren in umgekehrter Richtung auf $(Pa)_n$ mit der Basis $(Pa)_{n-1}$ und der Höhe h angewendet und auf diese Weise aus $(Pa)_n$ ein neues n-dimensionales Parallelotop auf der nämlichen Basis $(Pa)_{n-1}$ gebildet, bei welchem die zur Basis geneigten Kanten des $(Pa)_n$ durch zur Basis senkrechte Kanten ersetzt worden sind, so kann man — mit Beibehaltung der zwei parallelen Grenzräume R_{n-1}, deren einer die Basis trägt — die Umbildung der kongruenten in diesen Räumen R_{n-1} ähnlich liegenden Parallelotope $(Pa)_{n-1}$, $(Pa)'_{n-1}$ zur Hand nehmen und so, fortwährend ein neues System geneigter Kanten durch senkrechte ersetzend, bis zur inhaltsgleichen Kiste emporsteigen. Es hat dann offenbar diese $(Ki)_n$ eine mit B inhaltsgleiche Basis $(Ki)_{n-1}$ und die Höhe h.

Ist mittels allmählicher Umbildung der Beweis erbracht, daß die Formel (24) für Parallelotope gilt, so muß ausdrücklich bemerkt werden, daß das nämliche Resultat viel leichter erhalten wird durch Anwendung des Cavalierischen Prinzips. Insoweit wir es bei den Parallelotopen brauchen, kann das auf den n-dimensionalen Raum ausgedehnte Prinzip dahin ausgesprochen werden, daß zwei Parallelotope $(Pa)_n$, $(Pa)'_n$, für welche es ein Büschel paralleler Räume R_{n-1} gibt, welche dieselben allemal in zwei kongruenten — hier außerdem ähnlich liegenden — Polytopen $(Pa)_{n-1}$, $(Pa)'_{n-1}$ schneiden, inhaltsgleich sind. Mit Hilfe dieses Satzes, dessen Verallgemeinerung weiterhin besprochen werden soll, können die $n-1$ zur Senkrechtstellung einer ersten Gruppe von parallelen Kanten notwendigen Subtraktionen durch eine einzige Operation ersetzt werden.

Obige Betrachtungen erlauben uns folgenden allgemeinen Satz zu beweisen:

„Die Inhalte zweier Parallelotope, für welche die n durch einen Eckpunkt O gehenden Kanten $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ des einen den durch irgend einen Eckpunkt O' des anderen gehenden Kanten $O'A_1', O'A_2', \ldots, O'A_n'$ parallel sind, verhalten sich wie die Produkte dieser Kanten."

Denn die Voraussetzung, daß dieser Satz für $n = p$ gelte, schließt mittels (24) ein, daß dies auch der Fall ist für $n = p + 1$, usw.

Früher [27a] ist bemerkt worden, daß das Parallelotop $(Pa)_n$ bestimmt ist, wenn man die Längen der in einen Eckpunkt O zusammenlaufenden Kanten $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ und die von ihnen gebildeten Winkel $A_1OA_2, A_1OA_3, \ldots, A_{n-1}OA_n$ kennt: deshalb muß der Inhalt I sich in diesen Größen ausdrücken lassen. Wirklich hat man, wenn die Länge von OA_i mit k_i, der Cosinus des Winkels A_iOA_j mit $a_{i,j}$ bezeichnet wird,

$$(26)\quad I = k_1 k_2 \ldots k_n \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \ldots a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \ldots \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots 1 \end{vmatrix}}.$$

Der Beweis wird wieder mit Hilfe der Schlußweise von p auf $p + 1$ geliefert. Setzt man voraus, die Formel (26) gelte für $n = p$, was abgekürzt in der Gestalt

$$(27)\qquad I_p = k_1 k_2 \ldots k_p \sqrt{\Delta_p}$$

geschrieben werden mag, so ist nach (24)

$$I_{p+1} = I_p \cdot k_{p+1} \sin(OA_{p+1}, I_p)$$

und nach früheren Entwickelungen (I 132)

$$\sin^2(OA_{p+1}, I_p) = \frac{\Delta_{p+1}}{\Delta_p}.$$

Also ergibt sich unmittelbar

$$(28)\qquad I_{p+1} = k_1 k_2 \ldots k_{p+1} \sqrt{\Delta_{p+1}},$$

d. h. wenn (27) gilt, so gilt auch (28); deshalb gilt (26) für jedes n.

Aufgabe 46. Wenn die in einem Eckpunkt O eines $(Pa)_n$ zusammenstoßenden Grenzparallelotope $(Pa)_{n-1}$ in einer bestimmten Reihenfolge dem Inhalte nach eine arithmetische Reihe bilden, welche Reihe bilden dann die auf diesen Grenzräumen senkrecht stehenden Höhen?

Aufgabe 47. Die in einen Eckpunkt zusammenlaufenden Kanten eines $(Pa)_n$ sind alle 1 dM. lang und bilden paarweise Winkel von 45^0; berechne den Inhalt dieses $(Pa)_n$.

Wir leiten die einfache Beziehung zwischen dem Inhalte eines $(n-1)$-dimensionalen Parallelotopes $(Pa)_{n-1}$ und jenem seiner Projektion auf irgend einen $(n-1)$-dimensionalen Raum noch einmal ab, jetzt ohne von Grenzbetrachtungen Gebrauch zu machen. Dazu setzen wir voraus, das in einem Raume $R_{n-1}^{(a)}$ liegende $(Pa)_{n-1}^{(a)}$ mit den Eckpunkten $A_1, A_2, \ldots$ (Fig. 30) projiziere sich als das $(Pa)_{n-1}^{(a')}$ mit den Eckpunkten $A_1', A_2', \ldots$ auf den Raum $R_{n-1}^{(a')}$, welcher mit $R_{n-1}^{(a)}$ den Winkel φ bildet, und schneiden nun die projizierenden Geraden $A_1A_1', A_2A_2', \ldots$ durch zwei neue Räume R_{n-1}, den Raum $R_{n-1}^{(b)}$ parallel zu $R_{n-1}^{(a)}$ und den Raum $R_{n-1}^{(b')}$ parallel zu $R_{n-1}^{(a')}$, wobei diese neuen Räume $R_{n-1}^{(b)}$ und $R_{n-1}^{(b')}$ so gewählt werden, daß die Strecken A_iB_i und $A_i'B_i'$ der projizierenden Geraden sämtlich equipollent sind. Dann sind die neuen Punkte $B_1, B_2, \ldots$ die Eckpunkte eines zum $(Pa)_{n-1}^{(a)}$ equipollenten $(Pa)_{n-1}^{(b)}$, die neuen Punkte $B_1', B_2', \ldots$ die Eckpunkte eines zum $(Pa)_{n-1}^{(a')}$ equipollenten $(Pa)_{n-1}^{(b')}$, und es bilden $(Pa)_{n-1}^{(a)}$, $(Pa)_{n-1}^{(b)}$ die Gegenparallelotope eines $(Pa)_n$ und $(Pa)_{n-1}^{(a')}$, $(Pa)_{n-1}^{(b')}$ die Gegenparallelotope eines $(Pa)_n'$. Diese Parallelotope $(Pa)_n$ und $(Pa)_n'$ aber sind inhaltsgleich, wie Subtraktion der equipollenten Parallelotopenstümpfe $[(Pa)_{n-1}^{(b)}, (Pa)_{n-1}^{(b')}]$ und $[(Pa)_{n-1}^{(a)}, (Pa)_{n-1}^{(a')}]$ vom nämlichen

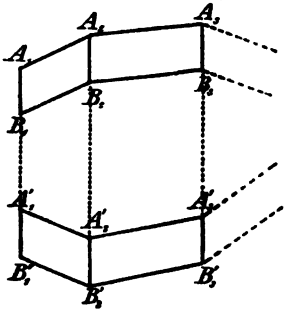


Fig. 30.

Parallelotopenstumpfe $[(Pa)^{(a)}_{n-1}, (Pa)^{(b')}_{n-1}]$ beweist. Also findet man mittels (24), weil φ der Winkel $[R^{(a)}_{n-1}, R^{(a')}_{n-1}]$ und also $90^0 - \varphi$ derjenige zwischen A_1B_1 und $R^{(a)}_{n-1}$ ist,

$$(Pa)^{(a)}_{n-1} \cdot A_1B_1 \sin(90^0 - \varphi) = (Pa)^{(a')}_{n-1} \cdot A_1'B_1';$$

deshalb ist, unabhängig von der Lage des $(Pa)^{(a)}_{n-1}$ im $R^{(a)}_{n-1}$ in bezug auf $R^{(a')}_{n-1}$,

$$(Pa)^{(a')}_{n-1} = (Pa)^{(a)}_{n-1} \cos\varphi ,$$

wie dies die Formel (25) erheischt.

Durch die obige Umbildung des Parallelotopes $(Pa)_n = [(Pa)^{(a)}_{n-1}, (Pa)^{(b)}_{n-1}]$ in das neue Parallelotop $(Pa)'_n = [(Pa)^{(a')}_{n-1}, (Pa)^{(b')}_{n-1}]$ ist man mit einem Schlage zu einem Parallelotope gelangt, für welches ein System paralleler Kanten auf zwei Gegenräumen $(Pa)_{n-1}$ senkrecht steht. Deshalb eignet sich auch dieses Verfahren zu einer allmählichen Umbildung eines gegebenen Parallelotopes $(Pa)_n$ in eine inhaltsgleiche Kiste $(Ki)_n$. Und dies wird noch um so mehr der Fall werden, wenn man die Figur noch ein wenig vereinfacht, indem man annimmt (Fig. 30), daß A_1' mit A_1 und deshalb auch B_1' mit B_1 zusammenfällt. So nimmt die obige Umbildung die folgende Form an: sind $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ die durch den Eckpunkt O gehenden Kanten des $(Pa)_n$, steht $R^{(1)}_{n-1}$ in O auf OA_1 senkrecht und sind $OA^{(1)}_2, OA^{(1)}_3, \ldots, OA^{(1)}_n$ die Projektionen von $OA_2, OA_3, \ldots, OA_n$ auf $R^{(1)}_{n-1}$, so ist das $(Pa)^{(1)}_n$ mit den in O zusammentretenden Kanten $OA_1, OA^{(1)}_2, \ldots, OA^{(1)}_n$ mit $(Pa)_n$ inhaltsgleich. Steht dann weiter $R^{(2)}_{n-1}$ in O auf $OA^{(1)}_2$ senkrecht und sind $OA^{(2)}_3, OA^{(2)}_4, \ldots, OA^{(2)}_n$ die Projektionen von $OA^{(1)}_3, OA^{(1)}_4, \ldots, OA^{(1)}_n$ auf diesen $R^{(2)}_{n-1}$ durch OA_1, so ist das $(Pa)^{(2)}_n$ mit den in O zusammenlaufenden Kanten $OA_1, OA^{(1)}_2, OA^{(2)}_3, \ldots, OA^{(2)}_n$ mit $(Pa)^{(1)}_n$ und also auch mit $(Pa)_n$ inhaltsgleich. So fortfahrend erscheint die $(p+1)$-te Umbildung in folgender Form: Bringe durch O einen zu $OA^{(p)}_{p+1}$ senkrechten Raum $R^{(p+1)}_{n-1}$ und projiziere $OA^{(p)}_{p+2}, OA^{(p)}_{p+3}, \ldots, OA^{(p)}_n$ auf diesen $OA_1, OA^{(1)}_2, OA^{(2)}_3, \ldots, OA^{p-1}_p$ schon enthaltenden Raum; sodann bestimmen $OA_1, OA^{(1)}_2, OA^{(2)}_3, \ldots, OA^{(p)}_{p+1}$ und die Projektionen $OA^{(p+1)}_{p+2}, OA^{(p+1)}_{p+3}, \ldots, OA^{(p+1)}_n$ ein neues Entwicklungsstadium $(Pa)^{(p+1)}_n$ des Parallelotopes, usw.

Behufs weiterer Anwendungen beweisen wir noch eine merkwürdige Eigenschaft mit Hilfe des ersten Umbildungs-

verfahrens, indem wir voraussetzen, dasselbe sei bis zu dem Punkte angewandt worden, wo von den n in O zusammenlaufenden Kanten $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ die Kanten $OA_1, OA_2, \ldots, OA_p$ ersetzt worden sind durch andere $OA'_1, OA'_2, \ldots, OA'_p$, welche zu je zweien unter sich und alle zusammen zum Raume R_{n-p} der übrigen Kanten $OA_{p+1}, OA_{p+2}, \ldots, OA_n$ senkrecht sind. Die in Rede stehende Eigenschaft ist nun diese, daß der Inhalt der Kiste $(Ki)_p$ mit den Kanten $OA'_1, OA'_2, \ldots, OA'_p$ dem Inhalte der Projektion des Parallelotopes $(Pa)_p$ mit den Kanten $OA_1, OA_2, \ldots, OA_p$ auf den Raum R'_p von $(Ki)_p$ gleich kommt. Denn man zeigt leicht, daß der Inhalt dieser Projektion sich bei keinem der p schon zurückgelegten Transformationsschritte geändert haben kann. Betrachtet man nämlich den Übergang von $O(A'_1, A'_2, \ldots, A'_{q-1}, A_q, \ldots, A_p)$ zu $O(A'_1, A'_2, \ldots, A'_q, A_{q+1}, \ldots, A_p)$, wobei OA_q durch seine Projektion OA'_q auf die zu $OA'_1, OA'_2, \ldots, OA'_{q-1}, OA_{q+1}, \ldots, OA_n$ senkrechte Gerade durch O ersetzt wird, so gilt es die Inhaltsgleichheit der Parallelotope

$$O(A'_1, A'_2, \ldots, A'_{q-1}, B_q, \ldots, B_p),$$
$$O(A'_1, A'_2, \ldots, A'_q, B_{q+1}, \ldots, B_p)$$

darzutun, wo $B_q, B_{q+1}, \ldots, B_p$ die Projektionen von $A_q, A_{q+1}, \ldots, A_p$ auf R'_p sind. Deutet man sie als Prismen mit dem Parallelotope $O(A'_1, A'_2, \ldots, A'_{q-1}, B_{q+1}, \ldots, B_p)$ zur gemeinschaftlichen Basis, welche dann weiter respektive OB_q und OA'_q zu Mantelkanten haben, so folgt die Inhaltsgleichheit dieser beiden Prismen aus der Bemerkung, daß OA'_q zur gemeinschaftlichen Basis normal ist und die Projektion von OB_q auf OA'_q bildet. Wie oben erinnert wurde, ist OA'_q nämlich einerseits zu $OA'_1, OA'_2, \ldots, OA'_{q-1}$, und andererseits zu $OA_{q+1}, OA_{q+2}, \ldots, OA_p$ senkrecht, woraus hervorgeht, daß die Punkte $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{q-1}$ einerseits und die Projektionen $B_{q+1}, B_{q+2}, \ldots, B_p$ andererseits in dem Raume R'_{p-1} von R'_p liegen, welcher in O senkrecht auf OA'_q steht. Und weil OA'_q zu $A_qA'_q$ und zu A_qB_q senkrecht ist, so ist sie auch zu A'_qB_q senkrecht.

Aus der Tatsache, daß der Inhalt der Projektion des $(Pa)_p$ auf den Raum R'_p der Kiste $(Ki)_p$ sich nicht ändert, und die Projektion der im R'_p liegenden Kiste auf R'_p mit

$(Ki)_p$ identisch ist, ergibt sich nun schließlich, daß die Projektion des $(Pa)_p$ auf R'_p mit $(Ki)_p$ inhaltsgleich ist.

Mit Hilfe dieser Eigenschaft beweisen wir nun folgenden allgemeinen Satz:

„Sind zwei Parallelotope $(Pa)_p$, $(Pa)_{n-p}$ mit gemeinschaftlicher Ecke O, deren Räume R_p, R_{n-p} nur den Punkt O gemein haben und also — $p \leqq n-p$ vorausgesetzt — miteinander p Winkel $u_1, u_2, \ldots, u_p$ bilden, Grenzgebilde eines nämlichen Parallelotopes $(Pa)_n$, so hat man

$$I_n = I_p I_{n-p} \sin u_1 \sin u_2 \ldots \sin u_p ,$$

wenn I_n, I_p, I_{n-p} die Inhalte von $(Pa)_n$, $(Pa)_p$, $(Pa)_{n-p}$ bezeichnen.“

Wendet man nämlich auf $(Pa)_n$ die oben angegebene Transformation an, durch welche ein Grenzparallelotop $(Pa)_p$ übergeht in eine Kiste mit den Kanten $OA'_1, OA'_2, \ldots, OA'_p$, deren Raum R'_p in O zu R_{n-p} senkrecht ist, so hat man das entsprechende neue Parallelotop $(Pa)'_n$ nur durch p-malige rechtwinklige Prismenbildung aus $(Pa)_{n-p}$ entstanden zu denken um mittels (24) auf die folgenden Formeln

$$I_{n-p+1} = I_{n-p} \cdot OA'_p, \; I_{n-p+2} = I_{n-p+1} OA'_{p-1}, \ldots, I_n = I_{n-1} OA'_1$$

zu stoßen, wo $I_{n-p+1}, I_{n-p+2}, \ldots, I_n$ die Inhalte der nacheinander erzeugten Prismenparallelotope sind. Also ist

$$I_n = I_{n-p} \cdot OA'_1 \cdot OA'_2 \ldots OA'_p$$

oder, wenn I'_p den Inhalt der Kiste $(Ki)_p$ angibt, kürzer

$$I_n = I_{n-p} \cdot I'_p .$$

Endlich geht diese letzte Beziehung mittels (25), weil R'_p zu R_{n-p} senkrecht ist und die Winkel zwischen R_p und R'_p also (I 50_4) die Komplemente der Winkel $u_1, u_2, \ldots, u_p$ zwischen R_p und R_{n-p} sind, in die zu beweisende Gleichung über.

In dem früher [20a] schon erwähnten Werke Schläflis findet man § 12 den folgenden bemerkenswerten allgemeinen Satz bewiesen:

„Die Summe der Quadrate der Inhalte der senkrechten Projektionen eines begrenzten Teiles T irgend eines p-dimensionalen Raumes auf sämtliche $(n)_p$ Koordinatenräume R_p eines rechtwinkligen Systems ist dem Quadrate des Inhaltes dieses Raumteiles T gleich.“

Der sich zunächst auf ein Parallelotop $(Pa)_p$ beschränkende Beweis schließt sich der Formel (26) an, wo n durch p ersetzt ist; in der dort verwendeten Bezeichnungsweise ist nämlich

$$(29)\qquad \frac{I^2}{k_1^2 k_2^2 \dots k_p^2} = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & 1 & \dots & a_{3p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Sind nun $b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,n}$ die Cosinus der Winkel, welche die Kante von der Länge k_i mit den Achsen OX_1, $OX_2, \dots, OX_n$ irgend eines rechtwinkligen Systems bildet, so hat man allgemein die Beziehungen

$$\sum_{m=1}^{n} b_{i,m}^2 = 1, \quad \sum_{m=1}^{n} b_{i,m} b_{j,m} = a_{i,j};$$

deshalb erscheint das rechte Glied obiger Gleichung in der Form

$$(30)\qquad \Delta_p \equiv \begin{vmatrix} \sum_1^n b_{1i}^2 & \sum_1^n b_{1i} b_{2i} & \sum_1^n b_{1i} b_{3i} & \dots & \sum_1^n b_{1i} b_{pi} \\ \sum_1^n b_{2i} b_{1i} & \sum_1^n b_{2i}^2 & \sum_1^n b_{2i} b_{3i} & \dots & \sum_1^n b_{2i} b_{pi} \\ \sum_1^n b_{3i} b_{1i} & \sum_1^n b_{3i} b_{2i} & \sum_1^n b_{3i}^2 & \dots & \sum_1^n b_{3i} b_{pi} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_1^n b_{pi} b_{1i} & \sum_1^n b_{pi} b_{2i} & \sum_1^n b_{pi} b_{3i} & \dots & \sum_1^n b_{pi}^2 \end{vmatrix}.$$

Und hieraus folgt — wie Schläfli bemerkt, „nach einem bekannten Satze“ —

$$(31)\qquad \Delta_p = \Sigma \begin{vmatrix} b_{1\alpha} & b_{1\beta} & b_{1\gamma} & \dots & b_{1\pi} \\ b_{2\alpha} & b_{2\beta} & b_{2\gamma} & \dots & b_{2\pi} \\ b_{3\alpha} & b_{3\beta} & b_{3\gamma} & \dots & b_{3\pi} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p\alpha} & b_{p\beta} & b_{p\gamma} & \dots & b_{p\pi} \end{vmatrix}^2,$$

wo die Summe sich erstreckt über die Quadrate der Determinanten, welche erhalten werden bei Ersetzung von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \pi$ durch jede der $(n)_p$ Kombinationen der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ zu p. Übergehen wir den selbstverständlichen letzten Teil des Beweises, welcher sich auf dem Übergang vom Parallelotop $(Pa)_p$ zum p-dimensionalen Raumteile T bezieht, so muß also noch gezeigt werden, daß erstens die rechten Seiten der Gleichungen (30) und (31) einander gleich sind und zweitens Multiplikation des in (31) unter dem Summenzeichen stehenden Determinantenquadrates mit dem Produkte $k_1^2 k_2^2 \ldots k_p^2$ das Quadrat des Inhaltes der Projektion von $(Pa)_p$ auf den Koordinatenraum $O(X_\alpha X_\beta X_\gamma \ldots X_\pi)$ liefert.

Unterscheidet man die rechten Seiten der Gleichungen (30) und (31) als Δ_p und Δ_p' voneinander, so kann der Beweis der Gleichheit dieser Formen Δ_p und Δ_p' folgenderart geführt werden. Nach dem Multiplikationsgesetz der Determinanten hat man

$$(32) \qquad \Delta_p' = \Sigma \begin{vmatrix} \Sigma b_{1i}^2 & \Sigma b_{1i} b_{2i} & \Sigma b_{1i} b_{3i} & \ldots & \Sigma b_{1i} b_{pi} \\ \Sigma b_{2i} b_{1i} & \Sigma b_{2i}^2 & \Sigma b_{2i} b_{3i} & \ldots & \Sigma b_{2i} b_{pi} \\ \Sigma b_{3i} b_{1i} & \Sigma b_{3i} b_{2i} & \Sigma b_{3i}^2 & \ldots & \Sigma b_{3i} b_{pi} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Sigma b_{pi} b_{1i} & \Sigma b_{pi} b_{2i} & \Sigma b_{pi} b_{3i} & \ldots & \Sigma b_{pi}^2 \end{vmatrix},$$

wo die Summation innerhalb jeder der $(n)_p$ Determinanten auf die dieser Determinante entsprechende Kombination $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \pi)$ der n Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ zu p beschränkt bleibt. Ist φ irgend eine von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \pi$ verschiedene Zahl der Reihe $1, 2, 3, \ldots, n$, so genügt es, in Δ_p sämtliche $p(n-p)$ Koeffizienten $b_{1\varphi}, b_{2\varphi}, b_{3\varphi}, \ldots, b_{p\varphi}$ verschwinden zu lassen, um einzusehen, daß die $(n)_p$ Determinanten von Δ_p' sich wirklich in Δ_p vorfinden, und es kann deshalb nur noch die Frage aufgeworfen werden, ob Δ_p vielleicht auch andere, nicht in Δ_p' auftretende Ausdrücke enthält. Und diese Frage ist zu verneinen; denn es ergibt sich unmittelbar, daß irgend ein in Δ_p auftretendes Produkt von $2p$ Koeffizienten b sich mit dem nämlichen Vorzeichen in Δ_p' vorfindet. Deshalb sind Δ_p und Δ_p' nur in der Form verschieden.

Zum zweiten Teil des Beweises übergehend schreiben wir (32) in der Form

$$k_1^2 k_2^2 \dots k_p^2 \Delta_p' =$$

$$\Sigma \begin{vmatrix} k_1^2 \Sigma b_{1i}^2 & k_1 k_2 \Sigma b_{1i} b_{2i} & k_1 k_3 \Sigma b_{1i} b_{3i} \dots & k_1 k_p \Sigma b_{1i} b_{pi} \\ k_2 k_1 \Sigma b_{2i} b_{1i} & k_2^2 \Sigma b_{2i}^2 & k_2 k_3 \Sigma b_{2i} b_{3i} \dots & k_2 k_p \Sigma b_{2i} b_{pi} \\ k_3 k_1 \Sigma b_{3i} b_{1i} & k_3 k_2 \Sigma b_{3i} b_{2i} & k_3^2 \Sigma b_{3i}^2 \dots & k_3 k_p \Sigma b_{3i} b_{pi} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_p k_1 \Sigma b_{pi} b_{1i} & k_p k_2 \Sigma b_{pi} b_{2i} & k_p k_3 \Sigma b_{pi} b_{3i} \dots & k_p^2 \Sigma b_{pi}^2 \end{vmatrix}.$$

Beschränken wir uns beiderseits auf das Glied von Δ_p', wo sich die Summation innerhalb der Determinante auf die Kombination $(\alpha, \beta, \gamma, \dots, \pi)$ bezieht, und betrachten allgemein $k_i b_{i,m}$ als die Projektion von k_i auf OX_m, so liefert die Einführung von

$$k_i^2 \sum_m b_{i,m}^2 = k_i'^2, \quad k_i k_j \sum_m b_{i,m} b_{j,m} = k_i' k_j' \cdot a_{i,j}',$$

wo k_i' die Projektion von k_i auf $O(X_\alpha X_\beta X_\gamma \dots X_\pi)$ und $a_{i,j}'$ der Cosinus des Winkels zwischen k_i' und k_j' ist,

$$k_1^2 k_2^2 \dots k_p^2 \Delta_p'(\alpha, \beta, \gamma, \dots, \pi)$$

$$= k_1'^2 k_2'^2 \dots k_p'^2 \begin{vmatrix} 1 & a_{12}' & a_{13}' \dots & a_{1p}' \\ a_{21}' & 1 & a_{23}' \dots & a_{2p}' \\ a_{31}' & a_{32}' & 1 \dots & a_{3p}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1}' & a_{p2}' & a_{p3}' \dots & 1 \end{vmatrix},$$

womit — in Verbindung mit Formel (26) — der zweite Teil bewiesen ist.

34. Das Prisma. Wird der Querschnitt des einfachen Prismas mit einem Raume R_{n-1} senkrecht zu den aufstehenden Mantelkanten als „Normalschnitt" bezeichnet, so findet man mit Hilfe des Substitutionsverfahren von Fig. 30 den Satz:

„Ein willkürliches schiefes Prisma mit dem Normalschnitt B und der Mantelkantenlänge h ist inhaltsgleich mit einem geraden Prisma mit der Basis B und der Höhe h."

Hiermit ist die Inhaltsbestimmung des schiefen Prismas auf diejenige des geraden Prismas zurückgeführt. Allein, bei letzterem einfachen Probleme tritt uns unerwartet eine

scheinbar prinzipielle Schwierigkeit entgegen. Wird verlangt, den Inhalt eines geraden Prismas, dessen Basis ein willkürliches Polytop $(Po)_{n-1}$ ist, in n-dimensionalen Maßeinheiten auszudrücken, so muß man über die Mittel verfügen, den Inhalt dieses Grundpolytopes $(Po)_{n-1}$ in $(n-1)$-dimensionalen Maßeinheiten anzugeben, und diese uns jetzt noch fehlenden Hilfsmittel können im allgemeinen nicht angegeben werden, solange die auf der Inhaltsformel des Prismas fußende Inhaltsformel der einfachsten $(n-1)$-dimensionalen Pyramide, des Simplex $S(n)$, nicht entwickelt worden ist. Dieser scheinbar viziöse Kreis jedoch kann in verschiedener Weise umgangen werden.

Wir bemerken nur, daß es hier nicht notwendig ist, den Inhalt des Polytopes $(Po)_{n-1}$ in $(n-1)$-dimensionalen Maßeinheiten auszudrücken; es wird sich nämlich zeigen, daß es genügt den Umstand zu benutzen, daß die Lage des $(Po)_{n-1}$ im Operationsraume R_n zu beiden Seiten des dieses Polytop tragenden Raumes R_{n-1} die theoretische Möglichkeit darbietet, die verlangte Zahl mittels direkter Messung zu bestimmen.

Die Vergleichung des geraden Prismas $Pr_n(B, h)$ — d. h. des geraden n-dimensionalen Prismas mit der Basis B und der Höhe h — mit dem geraden Prisma $Pr_n(B, 1)$ liefert nun in Verbindung mit dem zweiten Satze der Nr. 31, weil letzteres Prisma offenbar ebensoviele n-dimensionale Maßeinheiten enthält wie seine Basis B $(n-1)$-dimensionale, den Satz:

„Die Maßzahl des Inhaltes I eines geraden Prismas ist gleich dem Produkte der Maßzahlen von Basis und Höhe."

Oder in andern Worten: Es gilt für das einfache gerade Prisma die Formel (24).

Beim schiefen einfachen Prisma $Pr_n(B, h)$ hat man nun, wenn B' den Normalschnitt, h' die Mantelkantenlänge und φ den Winkel zwischen den Räumen R_{n-1}, R'_{n-1} von B, B' bedeutet

$$B\cos\varphi = B', \quad h = h'\cos\varphi .$$

Deshalb ist

$$I = B'h' = Bh ,$$

d. h. der vorhergehende Satz gilt auch für das einfache schiefe Prisma.

Wir vergleichen jetzt noch zwei einfache Prismen $Pr_n(B_1, h_1)$ und $Pr_n(B_2, h_2)$ miteinander, deren Bases ähnliche und ähnlich liegende Polytope sind, weil wir diesen speziellen Fall später anzuwenden haben werden. Setzt man voraus, daß die homologen Strecken der ähnlichen $(n-1)$-dimensionalen Polytope B_1, B_2 sich wie b_1, b_2 verhalten, so kann aus den allgemeinen Entwicklungen über Ähnlichkeit abgeleitet werden, daß die oben als theoretisch möglich angeführte direkte Messung des Inhalts von B_1 und B_2 die nämliche Maßzahl liefern muß, wenn man B_1 mit der auf b_1 als Längeneinheit beschriebenen Maßeinheit, B_2 mit der auf b_2 als Längeneinheit beschriebenen Maßeinheit mißt. Also verhalten sich B_1 und B_2 wie diese zwei Kisten und hat man

$$B_1 : B_2 = b_1^{n-1} : b_2^{n-1}$$

und deshalb auch

$$I_1 : I_2 = b^{-1} h_1 : b_2^{n-1} h_2 . \tag{33}$$

Durch wiederholte Anwendung des Prozesses der Prismenbildung findet man in Verbindung mit den Betrachtungen der Nr. 33 den Satz:

Ist das Polytop $(Po)_{n-p}$ die Basis eines mehrfachen Prismas, dessen durch irgend einen Eckpunkt O von $(Po)_{n-p}$ gehende Mantelkanten $OA_1, OA_2, \ldots, OA_p$ ein Parallelotop $(Pa)_p$ bestimmen, und bilden die diese Gebilde $(Po)_{n-p}$, $(Pa)_p$ tragenden Räume R_{n-p}, R_p in O die Winkel $u_1, u_2, \ldots, u_p$, — wobei also wieder $p \leqq n-p$ vorausgesetzt wird —, so hat man

$$I_n = I_{n-p} \cdot I_p \sin u_1 \sin u_1 \ldots \sin u_p ,$$

wo I_{n-p}, I_p, I_n wieder die Inhalte von $(Po)_{n-p}$, $(Pa)_p$ und dem mehrfachen Prisma andeuten.“

Wir bemerken schließlich, daß der letzte Satz erlaubt, in jedem Falle, wo das Prisma gegeben vorliegt, auch die Oberfläche dieses Polytopes zu berechnen; auf diesen Punkt gehen wir aber nicht weiter ein.

35. Die einfache Pyramide. Der Inhalt des Dreiecks mit der Basis B und der Höhe h ist $\frac{1}{2} Bh$; der Inhalt der dreidimensionalen Pyramide mit der Basis B und der Höhe h ist $\frac{1}{3} Bh$. Also läßt sich vermuten, es werde sich der Inhalt der n-dimensionalen Pyramide mit der Basis B und der

Höhe h in der Form $\frac{1}{n} Bh$ ergeben müssen. Und diese Vermutung wächst durch die Bemerkung, daß die n-dimensionale Maßeinheit betrachtet werden kann als die Summe von $2n$ kongruenten und also inhaltsgleichen n-dimensionalen Pyramiden, deren jede eine der $2n$ begrenzenden $(n-1)$-dimensionalen Maßeinheiten zur Basis und den Mittelpunkt zum gemeinschaftlichen Scheitel hat. Wir beweisen jetzt, daß diese Formel in der Tat für alle einfachen n-dimensionalen Pyramiden gilt. Zu diesem Zwecke dehnen wir das bei der dreidimensionalen Pyramide übliche Verfahren auf R_n aus, wobei eine leicht verständliche schematische Figur zur Kürzung der Andeutungen beitragen möge.

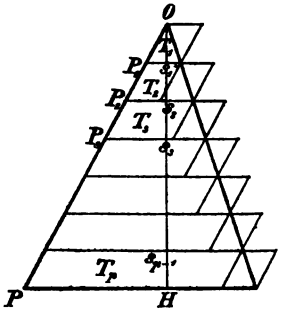


Fig. 31.

Teilt man (Fig. 31) das aus dem Scheitel O auf die Basis $(Po)_{n-1}$ gefällte Lot OH in p gleiche Teile und bringt durch die $p-1$ Teilpunkte $s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}$ Räume R_{n-1} parallel zum $(n-1)$-dimensionalen Grundraume, so bestimmen diese $p-1$ Räume in der Pyramide $p-1$ zu $(Po)_{n-1}$ ähnliche und ähnlich liegende Polytope $(Po)^{(1)}_{n-1}, (Po)^{(2)}_{n-1}, \ldots, (Po)^{(p-1)}_{n-1}$, deren Inhalte $B_1, B_2, \ldots, B_{p-1}$ mittels der schon bei der Ableitung der Gleichung (33) benutzten Beziehungen

$$(34) \qquad \frac{B_1}{1^{n-1}} = \frac{B_2}{2^{n-1}} = \ldots = \frac{B_{p-1}}{(p-1)^{n-1}} = \frac{B}{p^{n-1}}$$

mit dem Inhalte B der Basis $(Po)_{n-1}$ verbunden sind. Ist nun OP irgend eine Mantelkante der Pyramide, so kann man die Teile $T_1, T_2, \ldots, T_p$, in welche die Pyramide durch die $p-1$ parallelen Schnitte zerlegt worden ist, zuerst durch umgeschriebene, sodann durch eingeschriebene Prismen ersetzen, deren Mantelkanten sämtlich zu $OP_1 = P_1P_2 = \ldots = P_{n-1}P = \frac{1}{p} OP$ equipollent sind; dabei sind dann die Schnitte $B_1, B_2, \ldots, B_{p-1}$ mit Inbegriff des Grundpolytopes B selbst die Grundpolytope der p umgeschriebenen, die Schnitte

$B_1, B_2, \ldots, B_{p-1}$ ohne B die Deckpolytope der $p-1$ eingeschriebenen Prismen. Bezeichnen nun U_p und I_{p-1} die respektiven Summen der um- und eingeschriebenen Prismen, und ist I der gesuchte Inhalt der Pyramide, so hat man

$$U_p > I > I_{p-1}, \quad U_p - I_{p-1} = \frac{h}{p} B,$$

was ebenso wie im Falle $n = 3$ für unendliches p zum Resultate

$$\lim_{p=\infty} U_p = I$$

führt. Also ist nach (34)

$$I = Bh \cdot \lim_{p=\infty} \left[\frac{1}{p_n} (1^{n-1} + 2^{n-1} + 3^{n-1} + \ldots + p^{n-1}) \right]$$

und haben wir nur noch diesen Grenzwert zu bestimmen. Um Raum zu sparen, wenden wir wieder die Schlußweise von $n = q-1$ auf $n = q$ an; setzt man nämlich voraus, die gesuchte Grenze habe von $n = 2$ an bis $n = q-1$ inklusive den Wert $\frac{1}{n}$, so läßt sich leicht zeigen, daß dies auch für $n = q$ der Fall sein muß. Man hat nämlich

$$\begin{cases} (1+1)^q = 1 + (q)_1 + (q)_2 + \ldots (q)_1 + 1, \\ (1+2)^q = 1 + 2(q)_1 + 2^2(q)_2 + \ldots 2^{q-1}(q)_1 + 2^q, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (1+p)^q = 1 + p(q)_1 + p^2(q)_2 + \ldots p^{q-1}(q)_1 + p^q. \end{cases}$$

Also gibt die Addition

$$(35) \quad (1+p)^q = p + (q)_1 \sum_1^p k + (q)_2 \sum_1^p k^2 + \ldots (q)_1 \sum_1^p k^{q-1} + 1.$$

Nun ist aber nach unserer Voraussetzung

$$\lim_{p=\infty} \frac{1}{p^2} \sum_1^p k = \frac{1}{2}, \lim_{p=\infty} \frac{1}{p^3} \sum_1^p k^2 = \frac{1}{3}, \ldots, \lim_{p=\infty} \frac{1}{p^{q-1}} \sum_1^p k^{q-2} = \frac{1}{q-1}.$$

Wird (35) nach Division durch p^q in der Form

$$(q)_1\left[\frac{1}{p^q}\sum_1^p k^{q-1}\right] = \left(1+\frac{1}{p}\right)^q - \frac{1}{p^q} - (q)_2\frac{1}{p}\left[\frac{1}{p^{q-1}}\sum_1^p k^{q-2}\right]$$
$$- (q)_3\frac{1}{p^2}\left[\frac{1}{p^{q-2}}\sum_1^p k^{q-3}\right] - \ldots$$

geschrieben, so findet man beim Grenzübergange, weil die negativen Glieder rechts sämtlich verschwinden,

$$\text{(36)} \qquad \lim_{p=\infty}\frac{1}{p^q}\sum_1^p k^{q-1} = \frac{1}{q},$$

usw. Es gilt also der allgemeine Satz:

„Die Maßzahl des Inhaltes einer n-dimensionalen Pyramide ist der n-te Teil des Produktes der Maßzahlen von Basis und Höhe."

Man wird sich erinnern, daß man in der Stereometrie den Inhalt der Pyramide noch in anderer Weise ableitet mit Hilfe des Satzes, nach welchem zwei Pyramiden mit inhaltsgleichen Grundflächen und gleichen Höhen inhaltsgleich sind. Beim Beweise dieses Hilfssatzes kommt das Cavalierische Prinzip zur Anwendung. In seiner allgemeinsten n-dimensionalen Form lautet dieses Prinzip:

„Zwei auf irgend eine Weise begrenzte endliche Teile des Raumes R_n, für welche es ein Büschel von parallelen Räumen R_{n-1} gibt, deren jeder in beiden Teilen inhaltsgleiche Querschnitte bestimmt, sind inhaltsgleich."

Wir überlassen es dem geneigten Leser den Beweis dieses Satzes in aller Strenge zu führen.

Mittels dieses Cavalierischen Prinzips zeigt man nun leicht, daß zwei n-dimensionale Pyramiden mit inhaltsgleichen Grundpolytopen und gleichen Höhen inhaltsgleich sind. Denn es genügt diese Pyramiden im R_n so aufzustellen, daß ihre Grundpolytope in einem nämlichen Raume R_{n-1} und ihre Scheitel auf der nämlichen Seite dieses Raumes liegen, um sofort einzusehen, daß sie von den parallelen Räumen R_{n-1} eines bestimmten Büschels in inhaltsgleichen Polytopen geschnitten werden. In der nächsten Nummer wird gezeigt werden, wie dieses Ergebnis unabhängig von der Gleichung (36) zur Inhaltsformel der Pyramide führen kann.

[Wie man unmittelbar einsieht, übersetzt sich die Gleichung (36) in die Sprache der Integralrechnung als

$$\int_0^1 x^{q-1} dx = \frac{1}{q}.$$

Zur Vereinfachung werden wir von hier an die Prinzipien der Differential- und Integralrechnung in den Kreis unserer Betrachtungen aufnehmen.]

Obige Zerlegung der einfachen Pyramide in Schablonen beweist, daß der Schwerpunkt der Pyramide, als homogene Raumausfüllung des eingeschlossenen n-dimensionalen Raumstückes betrachtet, auf der Gerade liegt, welche den Scheitel verbindet mit dem Schwerpunkt des Grundpolytopes, dieses ebenfalls als homogene Raumausfüllung des eingeschlossenen $(n-1)$-dimensionalen Raumstückes betrachtet. Ersetzt man nämlich jede der zahllosen unendlich dünnen Schablonen durch ihre im Schwerpunkte angehäufte Masse, so erhält man eine ungleichmäßig belastete Gerade, für welche die Belastung in jedem Punkte der $(n-1)$-ten Potenz der Entfernung dieses Punktes vom Scheitel proportional ist. Hieraus geht dann mittels (36) außerdem hervor, daß der Schwerpunkt S der Pyramide das Geradensegment OP, welches vom Scheitel O und vom Schwerpunkte P der Basis begrenzt wird, in zwei Segmente OS und SP teilt, welche sich wie n zu 1 verhalten.

36. Das Simplex. Das Simplex $S(n+1)$ mit den Eckpunkten $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ und den diesen Eckpunkten gegenüberliegenden Grenzsimplexen $S(n)^{(1)}, S(n)^{(2)}, \ldots, S(n)^{(n+1)}$ ist eine Pyramide hinsichtlich irgend eines dieser Paare von Gegenelementen A_i, $S(n)^{(i)}$ als Scheitel und Basis. Also hat man, wenn h_i das aus A_i auf den Raum $R_{n-1}^{(i)}$ von $S(n)^{(i)}$ gefällte Lot ist und I und S_i die Inhalte von $S(n+1)$ und $S(n)^{(i)}$ andeuten, für $i = 1, 2, \ldots, n+1$,

$$I = \frac{1}{n} h_i S_i. \tag{37}$$

Ist P irgend ein Punkt innerhalb des Simplex $S(n+1)$, so bildet er mit jeder der $n+1$ Kombinationen der $n+1$ Eck-

punkte zu je n die Eckpunkte eines neuen Simplex, und diese $n+1$ partiellen Simplexe füllen das gegebene vollständig aus. Sind $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ die zu den $n+1$ Grenzsimplexen $S(n)^{(i)}$ von $S(n+1)$ normalen Abstände von P, so hat man also in der oben benutzten Bezeichnungsweise

$$x_1 S_1 + x_2 S_2 + \ldots + x_{n+1} S_{n+1} = nI,$$

welche Beziehung mittels (37) in

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \ldots + \frac{x_{n+1}}{h_{n+1}} = 1$$

übergeht. Diese Gleichung ist früher (I 79) in weniger einfacher Weise abgeleitet worden.

Wendet man das für den Schwerpunkt der Pyramide gefundene Resultat auf das Simplex an, so ergibt sich, daß der Schwerpunkt der n-dimensionalen homogenen Masse des Simplex zusammenfällt mit dem früher [26a] gefundenen Schwerpunkte von $n+1$ gleichen in den Eckpunkten des Simplex angenommenen Massen.

Aufgabe 48. Ein n-dimensionales Bassin, in der Form eines als Pyramide betrachteten Simplex $S(n+1)$ mit horizontaler Basis und nach unten gerichtetem Scheitel, ist ganz mit einer Flüssigkeit gefüllt. Wo liegt der Mittelpunkt des Druckes irgend eines der seitlich begrenzenden Simplexe $S(n)$?

Wir zeigen jetzt, wie die Gleichung (37) ohne Benutzung der Beziehung (36) bewiesen werden kann mit alleiniger Hilfe des Satzes, daß zwei Simplexe $S(n+1)$ mit inhaltsgleichen Grundsimplexen $S(n)$ und gleichen Höhen inhaltsgleich sind. Dabei denkt man natürlich sofort an die Zerlegung des dreidimensionalen dreiseitigen Prismas in drei inhaltsgleiche Vierflache, welche Zerlegung von V. Schlegel auf das vierdimensionale Prisma mit einem Vierflache als Basis ausgedehnt worden ist (vergleiche u. a. den 1902 erschienenen „Katalog mathematischer Modelle“ von M. Schilling, Halle a. S., Seite 31—33). Wir unserseits bedienen uns wieder der Schlußweise von p auf $p+1$, nehmen also an, die zu beweisende Gleichung (37) sei schon für $n=p$ bewiesen, und lesen dann folgendermaßen aus einer einfachen Figur ab, daß sie dann auch für $n=p+1$ gilt; dabei wird

in Verbindung mit der Zeichnung (Fig. 32) für p der spezielle Wert vier gewählt. Sind die Simplexe $(A_1, A_2, \ldots, A_5)$, $(A_1', A_2', \ldots, A_5')$ die parallelen Grundpolytope, A_1A_1', $A_2A_2', \ldots, A_5A_5'$ die parallelen Mantelkanten eines gegebenen fünfdimensionalen Prismas $(Pr)_5$, so teilen wir dieses Polytop zunächst mittels des Raumes R_4 durch A_1', A_2, A_3, A_4, A_5 in zwei Pyramiden mit gemeinschaftlichem Scheitel A_1', deren einfachste das vierdimensionale Simplex $(A_1, A_2, \ldots, A_5)$, die andere das vierdimensionale Prisma $(Pr)_4$ mit den Simplexen (A_2, A_3, A_4, A_5), (A_2', A_3', A_4', A_5') als parallelen Grundpolytopen und den parallelen Mantelkanten $A_2A_2', A_3A_3', A_4A_4', A_5A_5'$ zur Basis hat. Wird nun diese einfache Operation in bezug auf die Basis $(Pr)_4$ der letzten Pyramide wiederholt, so wird von $(Pr)_4$ ein Simplex abgetrennt, welches nach der Voraussetzung, der Beweis unseres Satz sei für $n = 4$ schon erbracht, den vierten Teil dieses Prismas $(Pr)_4$ bildet. Verbindet man sodann den Scheitel A_1' der Pyramide durch einen Raum R_4 mit dem die Zerlegung der $(Pr)_4$ vermittelnden Raume R_3 durch A_2', A_3, A_4, A_5, so muß dadurch von der Pyramide mit $(Pr)_4$ als Basis und A_1' als Scheitel auch ein Simplex $A_1'(A_2', A_3, A_4, A_5)$ abgetrennt werden, welches den vierten Teil dieser Pyramide bildet. Also wird bewiesen sein, daß das zuerst abgetrennte Simplex $A_1'(A_1, A_2, \ldots, A_5)$ den fünften Teil des gegebenen Prisma $(Pr)_5$ bildet, wenn noch gezeigt wird, daß die als Pyramiden betrachteten Simplexe $A_1'(A_1, A_2, \ldots, A_5)$ und $A_1'(A_2', A_2, \ldots, A_5)$ inhaltsgleich sind. Und dies ist nicht schwer; denn man hat sofort

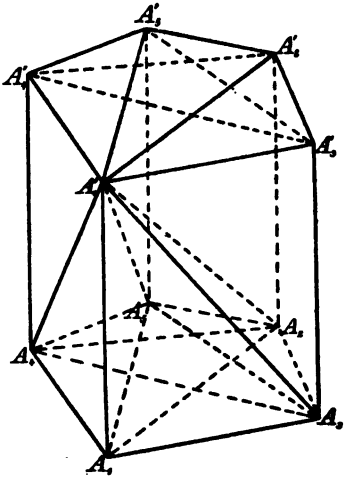


Fig. 32.

$$A_1'(A_1, A_2, \ldots, A_5) = A_2'(A_1, A_2, \ldots, A_5) = A_1(A_2', A_2, \ldots, A_5)$$
$$= A_1'(A_2', A_2, \ldots, A_5),$$

weil $A_1' A_2'$ zum Grundraume R_4 durch $A_1, A_2, \ldots, A_5$, ebenso $A_1 A_1'$ zum Raume R_4 des Prismas $(Pr)_4$ parallel ist, und die beiden Mittelglieder das nämliche Simplex repräsentieren. Weil die zu beweisende Gleichung für $n = p$ gilt, wenn sie für $n = p - 1$ gültig ist, und ihre Richtigkeit für $n = 2$ unmittelbar einleuchtet, so gilt sie allgemein.

Aufgabe 49. Wie kann man das Prisma $(Pr)_n$ in n inhaltsgleiche Simplexe zerlegen?

Die in einem Eckpunkt O zusammenstoßenden Kanten eines Simplex $S(n+1)$ sind, auch der Länge nach, die Kanten eines Parallelotopes $(Pa)_n$; wie verhalten sich die Inhalte beider Polytope? Sind $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ die in Rede stehenden Kanten, bezeichnen S_k und P_k die Inhalte des Simplex $S(O, A_1, A_2, \ldots, A_k)$ und des Parallelotopes $(Pa)_k$ auf $OA_1, OA_2, \ldots, OA_k$, und ist h_k das aus A_{k+1} auf den gemeinschaftlichen Raum R_k dieser k-dimensionalen Polytope gefällte Lot, so hat man

$$S_{k+1} = \frac{1}{k} h_k S_k, \quad P_{k+1} = h P_k,$$

also auch

$$\frac{S_{k+1}}{P_{k+1}} = \frac{1}{k} \frac{S_k}{P_k}$$

und, weil S_1 und P_1 einander gleich sind,

$$S_{k+1} = \frac{1}{k!} P_{k+1}.$$

Deshalb findet man schließlich für das gesuchte Verhältnis den Wert $\frac{1}{n!}$. Und dieses führt (33a) zum Satze:

„Die Inhalte zweier Simplexe, für welche die n in einen Eckpunkt O zusammenlaufenden Kanten des einen den durch einen Eckpunkt O' des andern gehenden Kanten parallel sind, verhalten sich wie die Produkte dieser Kanten."

Weiter findet man in Verbindung mit (26) die Inhaltsformel:

$$(38) \qquad I = \frac{1}{n!}\, k_1 k_2 \ldots k_n \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \ldots a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots 1 \end{vmatrix}}$$

des Simplex $S(n+1)$.

In Verbindung mit dem zweiten der Nr. 33 gegebenen Sätze findet man nun:

„Sind zwei Simplexe $S(p+1)$, $S(n-p+1)$ mit gemeinschaftlicher Ecke O, deren Räume R_p, R_{n-p} nur den Punkt O gemein haben und, wieder unter der Voraussetzung $p \leqq n-p$, miteinander die Winkel u_1, u_2, ..., u_p bilden, Grenzgebilde eines nämlichen $S(n+1)$, so hat man

$$(39) \qquad I_n = \frac{1}{(n)_p}\, I_p\, I_{n-p} \sin u_1 \sin u_2 \ldots \sin u_p,$$

wo I_n, I_p, I_{n-p} der Reihe nach die Inhalte von $S(n+1)$, $S(p+1)$ $S(n-p+1)$ angeben."

Deutet man nämlich zur Unterscheidung die Inhalte der drei Parallelotope $(Pa)_n$, $(Pa)_p$, $(Pa)_{n-p}$ mit der gemeinschaftlichen Ecke O, welche in den durch O gehenden Kanten mit $S(n+1)$, $S(p+1)$, $S(n-p+1)$ übereinstimmen, durch I'_n, I'_p, I'_{n-p} an, so ist

$$I_n = \frac{1}{n!}\, I'_n, \qquad I_p = \frac{1}{p!}\, I'_p, \qquad I_{n-p} = \frac{1}{(n-p)!}\, I'_{n-p}$$

und also

$$\frac{I_n}{I_p \cdot I_{n-p}} = \frac{p!\,(n-p)!}{n!}\, \frac{I'_n}{I'_p \cdot I'_{n-p}},$$

was, in Verbindung mit dem zitierten Satze, den neuen Satz beweist.

Von allgemeinerer Bedeutung ist wohl folgender Satz:

„Wird das im R_n gegebene Simplex $S(n+1)$ nach den Eckpunkten in p Simplexe niedrigerer Dimensionenzahl zergliedert und jedes dieser partiellen Simplexe $S(k)$ im von ihm bestimmten Raume R_{k-1} durch ein inhaltsgleiches Simplex $S'(k)$ ersetzt, so sind die Eckpunkte dieser p neuen Simplexe die

Eckpunkte eines neuen mit $S(n+1)$ inhaltsgleichen Simplex $S'(n+1)$."

Dieser allgemeinere Satz wird leicht bewiesen, wenn man die Ersetzung jeder Gruppe an und für sich betrachtet. Werden nämlich die Eckpunkte eines partiellen Simplex $S(p)$ im von ihnen bestimmten Raume R_{p-1} durch die Eckpunkte eines inhaltsgleichen Simplex $S'(p)$ ersetzt und die übrigen Eckpunkte, von welchem einer O heißen mag, an ihren Stellen gelassen, so hat sich bei Anwendung des vorhergehenden Satzes, wenn das Simplex mit O und den Eckpunkten von $S(p)$ als Eckpunkten das Simplex $S(p+1)$ dieses Satzes ist, auf der rechten Seite der Gleichung (39) nichts geändert, ist also auch I_n ungeändert geblieben, usw.

Letzterer Satz kann zu einer ganzen Menge von Inhaltsformeln des Simplex führen. Das einfachste Beispiel liefert das Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$, von welchem man irgend zwei Gegenkanten A_1A_2, A_3A_4 den sie tragenden Geraden entlang bewegt. Es ist dieses Beispiel zu gleicher Zeit der einfachste Fall des bekannten Theorems von Chasles, daß je zwei Kräfte A_1A_2, A_3A_4, welche ein willkürlich gegebenes Kräftesystem unseres Raumes zu ersetzen imstande sind, Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ von konstantem Inhalte bilden. Aus diesem einfachen Falle des Chaslesschen Satzes würde nun schon folgen, daß der Inhalt des Vierflachs $A_1A_2A_3A_4$ sich ausdrücken lassen muß in denjenigen Größen, welche sich bei der angegebenen Bewegung der Eckpunkte nicht ändern, d. h. in den Längen a_{12}, a_{34} der Strecken A_1A_2, A_3A_4, der kürzesten Entfernung l der sie tragenden Geraden und dem Winkel λ, unter welchem diese Geraden sich kreuzen. Wirklich ist bekanntlich $I=\frac{1}{6}a_{12}a_{34}l\sin\lambda$, wie man unmittelbar findet, wenn man die Kanten A_1A_2, A_3A_4 den sie tragenden Geraden entlang verschiebt bis die Endpunkte P, Q der kürzesten Entfernung Eckpunkte des Vierflachs $PP'QQ'$ geworden sind (Fig. 33), und nun bemerkt, daß dieses Vier-

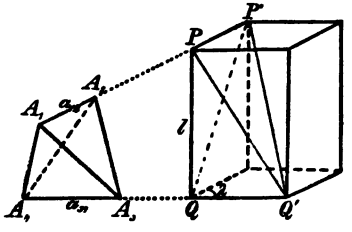


Fig. 33.

flach ein Sechstel des Parallelepipeds mit der Basis $a_{12}a_{34}\sin\lambda$ und der Höhe l bildet.

Letztere Umbildung gestattet noch den folgenden Satz hervorzuheben:

„Sind zwei Simplexe $S(p)$, $S(n-p+1)$ in zueinander windschiefen Räumen R_{p-1}, R_{n-p} Grenzgebilde des nämlichen Simplex $S(n+1)$, so hat man

$$(40) \qquad I_n = \frac{1}{p(n)_p} I_{p-1} I_{n-p} l \sin u_1 \sin u_2 \dots \sin u_{p-1},$$

wo I_n, I_{p-1}, I_{n-p} der Reihe nach die Inhalte von $S(n+1)$, $S(p)$, $S(n-p+1)$ bedeuten und, wieder unter der Voraussetzung $p-1 \leqq n-p$, l und $u_1, u_2, \dots, u_{p-1}$ Abstand und Winkel der Räume R_{p-1}, R_{n-p} angeben.“

Der Beweis dieses Satzes ist äußerst einfach. Verschiebt man die Simplexe $S(p)$, $S(n-p+1)$ in ihren Räumen parallel zu sich selbst, bis die Endpunkte P, Q der kürzesten Entfernung zwischen diesen Räumen Eckpunkte des $S(n+1)$ geworden sind, so ist der Inhalt des Simplex $S(p+1)$ mit Q und den Eckpunkten von $S(p)$ als Eckpunkten $\frac{1}{p} I_{p-1} l$, und nun gibt die Anwendung der Formel (39) sogleich das gewünschte Resultat, wenn man bedenkt, daß im speziellen jetzt vorliegenden Falle einer der p Winkel u ein rechter ist.

37. Koordinaten- und Kantenausdruck des Simplexinhalts. Sind die Koordinaten $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}$ der $n+1$ Eckpunkte A_i eines Simplex $S(n+1)$ in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem $O(X_1, X_2, \dots, X_n)$ gegeben, so wird der Inhalt I_n dieses Simplex durch die Gleichung

$$(41) \qquad I_n = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} & 1 \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} & \dots & x_n^{(3)} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n+1)} & x_2^{(n+1)} & x_3^{(n+1)} & & x_n^{(n+1)} & 1 \end{vmatrix}$$

bestimmt. Dieser für $n=2$ und $n=3$ allgemein bekannter Satz wird wieder mittels der Schlußweise von $p-1$ auf p bewiesen. Dazu betrachten wir den Fall $n=p$, wo ein

rechtwinkliges Koordinatensystem $O(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ gegeben vorliegt und man die Koordinaten $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_p^{(i)}$ der $p+1$ Eckpunkte A_i eines Simplex $S(p+1)$ kennt. Es ist dann (I 86)

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_p & 1 \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} & \ldots & x_p^{(2)} & 1 \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} & \ldots & x_p^{(3)} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(p+1)} & x_2^{(p+1)} & x_3^{(p+1)} & \ldots & x_p^{(p+1)} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung des Raumes $R_{p-1}^{(1)}$, welcher die Eckpunkte $A_2, A_3, \ldots, A_{p+1}$ enthält und deshalb im Simplex $S(p+1)$ dem Eckpunkte A_1 gegenüberliegt. Deutet nun Δ_p den Wert der linken Seite dieser Gleichung für $x_1 = x_1^{(1)}$, $x_2 = x_2^{(1)}, \ldots, x_p = x_p^{(1)}$ an und sind $\Delta_{p,1}, \Delta_{p,2}, \ldots, \Delta_{p,p}$ die Minoren von Δ_p in bezug auf die Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_p$, so stellt der Ausdruck

$$\frac{\Delta_p}{\sqrt{\Delta_{p,1}^2 + \Delta_{p,2}^2 + \ldots + \Delta_{p,p}^2}}$$

die Entfernung l des Eckpunktes A_1 vom Gegenraume $R_{p-1}^{(1)}$ des $S(p+1)$ dar (I 77). Wenn sich nun zeigen läßt, daß der Nenner dieses Bruches den mit $(p-1)!$ multiplizierten Inhalt I_{p-1} des im $R_{p-1}^{(1)}$ liegenden Grenzsimplex $S^{(1)}(p)$ von $S(p+1)$ darstellt, so muß der Zähler dem mit $p!$ multiplizierten Inhalte I_p des $S(p+1)$ gleich sein; denn es ist $l I_{p-1}$ nach Formel (37) mit $p I_p$ identisch. Nach der Voraussetzung aber, der in Rede stehende Satz sei schon für $n = p-1$ bewiesen, sind $\Delta_{p,1}, \Delta_{p,2}, \ldots, \Delta_{p,p}$ die mit $(p-1)!$ multiplizierten senkrechten Projektionen von I_{p-1} auf die $(p-1)$-dimensionalen Koordinatenräume, welche der Reihe nach den Achsen $OX_1, OX_2, \ldots, OX_p$ gegenüberliegen. Also hat man, wenn das aus A_1 auf $R_{p-1}^{(1)}$ gefällte Lot mit den Achsen $OX_1, OX_2, \ldots, OX_p$ die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ bildet,

$$\Delta_{p,1} = (p-1)!\, I_{p-1} \cos\alpha_1, \quad \Delta_{p,2} = (p-1)!\, I_{p-1} \cos\alpha_2 \ldots \Delta_{p,p} = (p-1)!\, I_{p-1} \cos\alpha_p$$

und deshalb auch (I 70)

$$\sqrt{\Delta_{p,1}^2 + \Delta_{p,2}^2 + \ldots + \Delta_{p,p}^2}$$

$$= (p-1)!\, I_{p-1} \sqrt{\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_p + \ldots \cos^2\alpha_p} = (p-1)!\, I_{p-1}.$$

Somit gilt die Beziehung (41) für $n = p$, wenn sie für $n = p-1$ bewiesen ist, usw.

Es gibt die rechte Seite der früher (I 86_7) schon in Aussicht gestellten Formel (41) den Inhalt des Simplex $S(n+1)$ in Maßpolytopen mit der Längeneinheit der Koordinaten $x_i^{(k)}$ der Eckpunkte als Seite. Deshalb wird der nämliche Ausdruck bei schiefwinkligen Koordinaten den Inhalt des Simplex darstellen, falls man das Maßpolytop ersetzt durch ein Parallelotop $(Pa)_n$, dessen Kanten sämtlich die Einheit zur Länge haben und den schiefwinkligen Achsen parallel sind. Sind $a_{i,j}$ die Kosinus der Winkel X_iOX_j zwischen diesen Achsen, so hat man also in Verbindung mit (26), wieder in Maßpolytopen, die Beziehung (42):

$$I_n = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & 1 \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} & \ldots & x_n^{(3)} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(n+1)} & x_2^{(n+1)} & x_3^{(n+1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{vmatrix} \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 1 & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & 1 \end{vmatrix}}.$$

Schreibt man die Formeln für die Inhalte I_n, I_n' zweier Simplexe $S(n+1)$, $S'(n+1)$, deren Eckpunkte durch die auf das nämliche rechtwinklige System bezogenen Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und $y_1, y_2, \ldots, y_n$ gegeben sind, in der Form

$$n!\, I_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} \\ 0 & 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & x_1^{(n+1)} & x_2^{(n+1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} \end{vmatrix},$$

$$-n!\, I_n' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \ldots & y_n^{(1)} \\ 1 & 0 & y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \ldots & y_n^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & y_1^{(n+1)} & y_2^{(n+1)} & \ldots & y_n^{(n+1)} \end{vmatrix},$$

so gibt die Multiplikation dieser Gleichungen nach bekannten Determinantensätzen

$$-(n!)^2 I_n I_n' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \Sigma x_i^{(1)} y_i^{(1)} & \Sigma x_i^{(1)} y_i^{(2)} & \dots & \Sigma x_i^{(1)} y_i^{(n+1)} \\ 1 & \Sigma x_i^{(2)} y_i^{(1)} & \Sigma x_i^{(2)} y_i^{(2)} & \dots & \Sigma x_i^{(2)} y_i^{(n+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \Sigma x_i^{(n+1)} y_i^{(1)} & \Sigma x_i^{(n+1)} y_i^{(2)} & \dots & \Sigma x_i^{(n+1)} y_i^{(n+1)} \end{vmatrix},$$

wo sich alle Summen Σ über i von $i = 1$ bis $i = n$ erstrecken. Multipliziert man alle Horizontalreihen mit Ausnahme der ersten mit -2, die erste Vertikalreihe mit $-\frac{1}{2}$ und addiert nachher die der Reihe nach mit $\Sigma x_i^{(1)^2}$, $\Sigma x_i^{(2)^2}$, $\dots$, $\Sigma x_i^{(n+1)^2}$ multiplizierte erste Horizontalreihe zu der zweiten, dritten, $\dots$, $(n+2)$-ten, und ebenso die der Reihe nach mit $\Sigma y_i^{(1)^2}$, $\Sigma y_i^{(2)^2}$, $\dots$, $\Sigma y_i^{(n+1)^2}$ multiplizierte erste Vertikalreihe zu der zweiten, dritten, $\dots$, $(n+2)$-ten, so findet man

$$2^n (n!)^2 I_n I_n' =$$

$$(-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \Sigma (x_i^{(1)} - y_i^{(1)})^2 & \Sigma (x_i^{(1)} - y_i^{(2)})^2 & \dots & \Sigma (x_i^{(1)} - y_i^{(n+1)})^2 \\ 1 & \Sigma (x_i^{(2)} - y_i^{(1)})^2 & \Sigma (x_i^{(2)} - y_i^{(2)})^2 & \dots & \Sigma (x_i^{(2)} - y_i^{(n+1)})^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \Sigma (x_i^{(n+1)} - y_i^{(1)})^2 & \Sigma (x_i^{(n+1)} - y_i^{(2)})^2 & \dots & \Sigma (x_i^{(n+1)} - y_i^{(n+1)})^2 \end{vmatrix},$$

d. h., wenn $a_{i,k}$ die Entfernung des Eckpunktes A_i des ersten Simplex vom Eckpunkte A_k' des zweiten angibt,

$$(43) \qquad I_n I_n' = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n (n!)^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_{11}^2 & a_{12}^2 & \dots & a_{1,n+1}^2 \\ 1 & a_{21}^2 & a_{22}^2 & \dots & a_{2,n+1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_{n+1,1}^2 & a_{n+1,2}^2 & \dots & a_{n+1,n+1}^2 \end{vmatrix}.$$

Und wenn die Simplexe $S(n+1)$, $S'(n+1)$ zusammenfallen und A_i' nicht von A_i verschieden ist, so erhält man

$$(44)\quad I_n^2 = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n (n!)^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & k_{12}^2 & \dots & k_{1,n+1}^2 \\ 1 & k_{21}^2 & 0 & \dots & k_{2,n+1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & k_{n+1,1}^2 & k_{n+1,2}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

wo die in der letzten Determinante auftretenden Größen k die Kanten des Simplex sind.

38. Endlichgleichheit zweier negativ kongruenter Simplexe. Wir schließen die Inhaltsbetrachtungen des Simplex ab mit der Behandlung der Frage, ob zwei negativ kongruente Simplexe derart in Teile zerlegt werden können, daß jedem Teile des einen ein zu ihm positiv kongruenter Teil des andern entspricht, d. h. ob es möglich ist, ein willkürlich gegebenes Simplex so in Polytope zu zerlegen, daß eine andere Zusammenfügung dieser Polytope ein zum gegebenen Simplex negativ kongruentes Simplex liefern kann. Für das Vierflach kennt man — vergleiche z. B. eine kleine Arbeit von P. Mansion (*Mathesis*, 1901, S. 242) — zwei verschiedene Lösungen des Problems, von welchen die ältere (Gerling, Stegmann, 1844) mit dem Umzentrum, die neuere (Darboux, 1900) mit dem Inzentrum zusammenhängt. Und diese Lösungen lassen sich sofort auf den Raum R_n ausdehnen. Man hat nämlich die Sätze:

„Ein Simplex $S(n+1)$ ist die algebraische Summe von $\frac{1}{2}(n+1)!$ Simplexen $S'(n+1)$ mit einem gemeinschaftlichen Eckpunkte im Umzentrum U, während jedes derselben zwei Eckpunkte A_i, A_k mit $S(n+1)$ gemein hat und den Raum R_{n-1}, der durch seine übrigen $n-1$ Eckpunkte geht und die Kante $A_i A_k$ senkrecht halbiert, zum Symmetrieraum besitzt.“

„Ein Simplex $S(n+1)$ ist die Summe von $(n+1)!$ Simplexen $S'(n+1)$ mit einem gemeinschaftlichen Eckpunkte im Inzentrum I, welche sich in $\frac{1}{2}(n+1)!$ Paare zueinander symmetrischer Simplexe ordnen. Bezeichnet man allgemein die Projektion von I auf den Grenzraum R_{n-p}, welcher die p Eckpunkte $A_{k_1}, A_{k_2}, \dots, A_{k_p}$ nicht enthält, durch I mit den p Indizes $k_1, k_2, \dots, k_p$, so bilden

$$(I, I_1, I_{12}, I_{123}, \dots, I_{12\dots n-1}, A_{n+1}),$$
$$(I, I_2, I_{12}, I_{123}, \dots, I_{12\dots n-1}, A_{n+1})$$

die Eckpunkte eines Paares dieser Teile $S'(n+1)$, welche in bezug auf den gemeinschaftlichen Grenzraum R_{n-1} durch

$$I,\ I_{12},\ I_{123},\ \ldots,\ I_{12\ldots n-1},\ A_{n+1}$$

zueinander symmetrisch sind."

Wir überlassen es dem geneigten Leser obige Sätze zu beweisen; beim ersten kann die Schlußweise von p auf $p+1$ benutzt werden, beim zweiten beobachte man das ebene Viereck $II_1I_{12}I_2$ mit der Diagonale II_{12} als Symmetrieachse.

39. Die mehrfache Pyramide. Der Inhalt der Pyramide p-ter Stufe $Py[(Po)_{n-p}, S(p)]$ wird mit Hilfe der Formel (40) leicht gefunden, indem man die Basis $(Po)_{n-p}$ auf irgend eine Weise in Simplexe $S(n-p+1)$ zerlegt. Sind nämlich l und $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$ wieder der Abstand und die Winkel zwischen den Räumen R_{p-1}, R_{n-p} der Scheitel und der Basis, und I_{p-1}, $I^{(i)}_{n-p}$ die Inhalte des Simplex $S(p)$ der Scheitel und irgend eines der Teilsimplexe $S^{(i)}(n-p+1)$ des $(Po)_{n-p}$, so ist der Inhalt des Simplex $S^{(i)}(n+1)$, von welchem $S(p)$ und $S^{(i)}(n-p+1)$ Grenzgebilde sind,

$$I^{(i)} = \frac{1}{p(n)_p}\, I_{p-1}\, I^{(i)}_{n-p}\, l \sin u_1 \sin u_2 \ldots \sin u_{p-1}.$$

Deshalb gibt die Summation über die den verschiedenen Teilsimplexen $S^{(i)}(n-p+1)$ des $(Po)_{n-p}$ entsprechenden Teile $S^{(i)}(n+1)$ unmittelbar

$$I = \frac{1}{p(n)_p}\, I_{p-1}\, P\, l \sin u_1 \sin u_2 \ldots \sin u_{p-1}, \tag{45}$$

wo P den Inhalt des $(Po)_{n-p}$ angibt und wieder $p < n-p$ vorausgesetzt ist.

40. Der Prismenstumpf. Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall, wo ein einfaches n-dimensionales Prisma, welches das Simplex $S(n)$ mit den Eckpunkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ zur Basis hat, durch einen alle Mantelkanten treffenden Raum R_{n-1} abgestumpft wird, und deuten die Schnittpunkte auf den Mantelkanten durch $A_1, A_2, \ldots, A_n$ der Reihe nach mit $B_1, B_2, \ldots, B_n$ an. Es gilt dann der Satz:

„Der Inhalt des Prismenstumpfes mit den Simplexen $S(n)$, $S'(n)$ als Basisräumen ist gleich der Summe der Inhalte von

n Simplexen $S(n+1)$, deren Eckpunkte man erhält, wenn man der Reihe nach jeden Eckpunkt von $S'(n)$ zu den n Eckpunkten von $S(n)$ hinzufügt."

Dieser Satz wird wieder am leichtesten mittels der Schlußweise von p auf $p+1$ bewiesen; wir zeigen dies für den Schritt (Fig. 34) von $n=4$ auf $n=5$. Zu diesem Zwecke teilen wir den gegeben vorliegenden Prismenstumpf $(A_1A_2A_3A_4A_5, B_1B_2B_3B_4B_5)$ mittels des vierdimensionalen Raumes $(B_5, A_1A_2A_3A_4)$ in zwei Teile, das Simplex $S(6)$ mit den Eckpunkten $(A_1A_2A_3A_4A_5B_5)$ und die Pyramide mit B_5 als Scheitel und dem Prismenstumpfe $(A_1A_2A_3A_4, B_1B_2B_3B_4)$ als Basis, und bemerken, daß der Inhalt dieser Pyramide sich nicht ändert, wenn man A_5 anstatt B_5 zum Scheitel nimmt, weil die Gerade A_5B_5 dem vierdimensionalen Raume der Basis $(A_1A_2A_3A_4, B_1B_2B_3B_4)$ parallel läuft. Also hat man in leichtverständlicher Symbolik

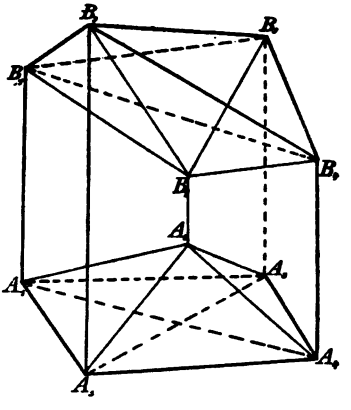


Fig. 34.

$$(A_1A_2\,..\,A_5, B_1B_2\,..\,B_5) = S(A_1A_2\,..\,A_5, B_5) + [A_5(A_1A_2A_3A_4, B_1B_2B_3B_4)].$$

Wird nun die Beziehung

$$(A_1A_2A_3A_4, B_1B_2B_3B_4) = \sum_{i=1}^{i=4} S(A_1A_2A_3A_4, B_i)$$

als bewiesen betrachtet, so ergibt sich somit unmittelbar

$$(A_1A_2\,..\,A_5, B_1B_2\,..\,B_5) = \sum_{i=1}^{i=5} S(A_1A_2\,..\,A_5, B_i),$$

usw.

Äußerst einfache Überlegungen erlauben obigen Satz anders zu gestalten. Nennt man einen Prismenstumpf mit einem Simplex als Basis einen „Simplexprismenstumpf", so hat man auch:

„Der Inhalt eines Simplexprismenstumpfes wird gefunden mittels Multiplikation des Inhaltes der Basis in das arithmetische Mittel der aus den Eckpunkten des Deckraumes auf die Basis gefällten Lote, oder aber mittels Multiplikation des Inhaltes des Normalschnittes in das arithmetische Mittel der Mantelkanten. Hierbei kann das arithmetische Mittel der Lote durch das Lot aus dem Schwerpunkte des Deckraumes, das arithmetische Mittel der Mantelkanten durch das von den Schwerpunkten der beiden Endräume begrenzte Geradensegment ersetzt werden."

Für den allgemeinen Prismenstumpf mit irgend einem Polytope als Basis gilt nun weiter der Satz:

„Der Inhalt eines Prismenstumpfes wird erhalten durch Multiplikation des Inhaltes des Basispolytopes in das aus dem Schwerpunkte des Deckpolytopes auf die Basis gefällten Lot, oder aber durch Multiplikation des Inhaltes des Normalschnittes in das von den Schwerpunkten der beiden Endpolytope begrenzte Geradensegment."

Der Beweis dieses Satzes wird folgendermaßen geführt. Wenn sich das Basispolytop $(Po)^{(b)}_{n-1}$ in die Simplexe $S^{(1)}(n)_b$, $S^{(2)}(n)_b$, ..., $S^{(k)}(n)_b$ zerlegen läßt, so kann man sich den Prismenstumpf als die Summe von k Simplexprismenstümpfen mit diesen Simplexen als Basissimplexen denken, und die Decksimplexe dieser Teile durch $S^{(1)}(n)_d$, $S^{(2)}(n)_d$, ..., $S^{(k)}(n)_d$ andeuten. Sind nun l_1, l_2, ..., l_k die aus den Schwerpunkten dieser Simplexe $S^{(1)}(n)_d$, $S^{(2)}(n)_d$, ..., $S^{(k)}(n)_d$ auf den Basisraum $R^{(b)}_{n-1}$ gefällten Lote, so hat man

$$I = S^{(1)}(n)_b l_1 + S^{(2)}(n)_b l_2 + \ldots + S^{(k)}(n)_b l_k,$$

wo $S^{(1)}(n)_b$, $S^{(2)}(n)_b$, ..., $S^{(k)}(n)_b$ für die Inhalte dieser Simplexe stehen, und also, wenn u_b, u_d die Winkel der Mantelkanten mit den Räumen $R^{(b)}_{n-1}$, $R^{(d)}_{n-1}$ der Endpolytope sind, auch

$$I = \frac{\sin u_d}{\sin u_b} [S^{(1)}(n)_d l_1 + S^{(2)}(n)_d l_2 + \ldots + S^{(k)}(n)_d l_k].$$

Nun steht aber rechts zwischen den Klammern die Summe der Momente der Teilsimplexe $S^{(1)}(n)_d$, $S^{(2)}(n)_d$, ..., $S^{(k)}(n)_d$ des $(Po)^{(d)}_{n-1}$ rücksichtlich des $R^{(b)}_{n-1}$; deshalb ergibt sich,

wenn l das aus dem Schwerpunkte S_d des $(Po)^{(d)}_{n-1}$ auf $R^{(b)}_{n-1}$ gefällte Lot bezeichnet,

$$I = \frac{\sin u_d}{\sin u_b} (Po)^{(d)}_{n-1} l = (Po)^{(b)}_{n-1} l. \tag{46}$$

Aufgabe 50. Beweise, daß der Inhalt eines Parallelotopenstumpfes durch Multiplikation des Normalschnittes mit der halben Summe irgend zweier einander gegenüberliegender Mantelkanten gefunden wird.

41. Der Pyramidenstumpf. Beim n-dimensionalen Pyramidenstumpfe beschränken wir uns auf den einfachen Fall, wo die beiden Endräume, d. h. der Basisraum $R^{(b)}_{n-1}$ der ursprünglichen Pyramide und der Schnittraum oder Deckraum $R^{(d)}_{n-1}$ zueinander parallel sind. Bezeichnet man einen solchen Pyramidenstumpf durch das Symbol $(B, D, h)_n$, wo B und D die Inhalte von Basispolytop und Deckpolytop sind und h die Entfernung der sie tragenden Räume $R^{(b)}_{n-1}$, $R^{(d)}_{n-1}$, d. h. die Höhe des Stumpfes angibt, so gilt der Satz:

„Der Inhalt des Pyramidenstumpfes $(B, D, h)_n$ wird gefunden, indem man die Höhe h multipliziert mit dem arithmetischen Mittel der n Glieder einer n-gliedrigen geometrischen Reihe, von welcher B und D die Endglieder sind."

Der Beweis dieses Satzes ist dem des entsprechenden Satzes der Stereometrie vollkommen analog. Wird der Stumpf (Fig 35) zur vollständigen Pyramide ausgebildet und ist x die Höhe der kleineren Pyramide, welche zu diesem Zwecke zum Stumpfe hinzugezählt werden muß, und also $h + x$ die Höhe der dadurch entstehenden größeren Pyramide, so hat man

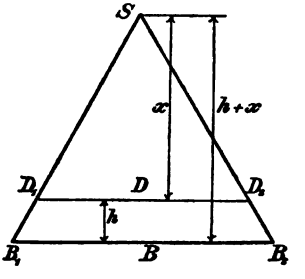


Fig. 35.

$$I = \frac{1}{n} [B(h + x) - Dx],$$

und es wird x berechnet mittels der Beziehung

$$B : D = (h + x)^{n-1} : x^{n-1},$$

welche aus Ähnlichkeitsgründen hervorgeht. Also ist

$$h + x = h\frac{\sqrt[n-1]{B}}{\sqrt[n-1]{B} - \sqrt[n-1]{D}}, \qquad x = h\frac{\sqrt[n-1]{D}}{\sqrt[n-1]{B} - \sqrt[n-1]{D}}$$

und man findet

$$I = \frac{h}{n}\,\frac{\sqrt[n-1]{B^n} - \sqrt[n-1]{D^n}}{\sqrt[n-1]{B} - \sqrt[n-1]{D}}$$

oder

$$(47)\qquad \left\{\begin{array}{l} I = \dfrac{h}{n}\Big[B + \sqrt[n-1]{B^{n-2}D} + \sqrt[n-1]{B^{n-3}D^2} + \ldots \\ \qquad + \sqrt[n-1]{BD^{n-2}} + D\Big]. \end{array}\right.$$

42. Das Simplotop. Der Inhalt des Simplotopes $S_t(p, n-p)$, welches [271] erzeugt wird (Fig. 36) durch die parallele Bewegung eines Simplex $S(p+1)$, wobei ein Eckpunkt O dieses Simplex nach und nach mit allen Punkten eines andern Simplex $S(n-p+1)$ zusammenfällt, wird leicht gefunden, indem man letzteres Simplex als die Summe einer großen Anzahl kleiner Parallelotope $(Pa)_{n-p}$ betrachtet. Läßt man bei dieser Bewegung des $S(p+1)$ den Punkt O nur mit allen Punkten irgend eines dieser Parallelotope zusammenfallen, so entsteht nämlich ein mehrfaches Prisma $(n-p)$-ter Stufe, dessen Basis zu $S(p+1)$ kongruent und ähnlich liegend ist und dessen Inhalt nach dem letzten Satze von Nr. 34 unmittelbar angegeben werden kann. Durch Summation findet man dann mittels eines bekannten Grenzüberganges:

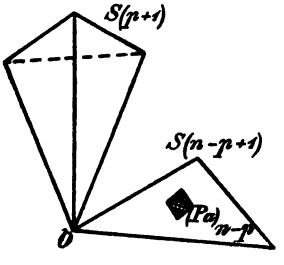


Fig. 36.

„Der Inhalt $I_{p,n-p}$ des Simplotopes $S_t(p, n-p)$ erscheint in der Form

$$I_{p,n-p} = I_p \cdot I_{n-p} \sin u_1 \sin u_2 \ldots \sin u_p,$$

wo I_p, I_{n-p} die Inhalte der Simplexe $S(p+1)$, $S(n-p+1)$ und $u_1, u_2, \ldots, u_p$, wieder unter der Voraussetzung $p \leqq n-p$, die von den Räumen R_p, R_{n-p} dieser Simplexe miteinander gebildeten Winkel sind.“

Denkt man sich das Simplex $S(p+1)$ wie wir sagen wollen in seiner ursprünglichen Lage (Fig. 36) und betrachtet das Parallelotop $(Pa)_n$, von welchem die sämtlichen in O zusammenlaufenden Kanten der beiden Simplexe $S(p+1)$, $S(n-p+1)$ Kanten sind, so lehrt obiger Satz, daß — wie zu erwarten war — der Inhalt des Simplotopes sich verhält zum Inhalte dieses Parallelotopes $(Pa)_n$ wie die Einheit zum Produkte der zwei Fakultäten $p!$ und $(n-p)!$

43. Das Prismoid. Wir bezeichnen wieder mit $R_{n-1}^{(b)}$ und $R_{n-1}^{(d)}$ die parallelen Räume R_{n-1} der Endpolytope und mit h den Abstand dieser Räume, d. h. die Höhe des Prismoids, und beweisen nun sogleich folgenden allgemeinen Satz:

„Der Inhalt S_x des Querschnittes des Prismoids mit einem zwischen $R_{n-1}^{(b)}$ und $R_{n-1}^{(d)}$ liegenden parallelen Raume $R_{n-1}^{(x)}$, welcher von $R_{n-1}^{(b)}$ den Abstand x und also von $R_{n-1}^{(d)}$ den Abstand $h-x$ hat, ist ein Polynom vom Grade $n-1$ in x."

Der Beweis dieses Satzes kann mittels einer einfachen Zerlegung des Prismoids vereinfacht werden. Nimmt man im Deckpolytope D irgendwo einen Punkt O an und verbindet ihn mittels Räume R_{n-1} mit den begrenzenden Räumen R_{n-2} des Basispolytopes B, so wird das Prismoid zerlegt in eine einfache Pyramide mit O als Scheitel und B als Basis, und ein sich um diese Pyramide herum lagerndes Gebilde, das sich weiter zerlegen läßt in Simplexe $S(n+1)$, deren Eckpunkte sämtlich in $R_{n-1}^{(b)}$ und $R_{n-1}^{(d)}$ liegen. Und nun ergibt sich unmittelbar, daß der in Rede stehende Satz für irgend einen der so erhaltenen n-dimensionalen Teile gilt, und deshalb auch, weil S_x offenbar die Summe der innerhalb dieser Teile befindlichen Querschnitte bildet, für das ganze Prismoid selbst gelten muß. Für den Inhalt des Schnittes der vereinzelten Pyramide findet man nämlich einerseits $\left(\frac{h-x}{h}\right)^{n-1} B$.

Und andererseits ist der Querschnitt eines Simplex $S(n+1)$, von welchem p Eckpunkte in $R_{n-1}^{(b)}$ und also $n-p+1$ Eckpunkte in $R_{n-1}^{(d)}$ liegen, — siehe den Satz von Nr. 13 —, ein Simplotop $S_t(p-1, n-p)$, dessen erzeugende Simplexe $S(p)$ und $S(n-p+1)$ zu $(h-x)^{p-1}$ und x^{n-p} proportionale Inhalte haben, so daß der Inhalt dieses Schnittes selbst zu $(h-x)^{p-1}x^{n-p}$ proportional ist. Sind nämlich I_{p-1}

und I_{n-p} die Inhalte der in $R_{n-1}^{(b)}$ und $R_{n-1}^{(d)}$ liegenden Grenzsimplexe des $S(n+1)$, so sind $\left(\frac{h-x}{h}\right)^{p-1} I_{p-1}$ und $\left(\frac{x}{h}\right)^{n-p} I_{n-p}$ die Inhalte der das Simplotop erzeugenden Simplexe. Also hat man

$$(48) \qquad S_x = a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-2} x + a_{n-1}.$$

Aus dieser Formel ist zu folgern, daß der gesuchte Inhalt des Prismoids von der Höhe h und den n Koeffizienten a_i abhängt. Dies wird durch direkte Integration bestätigt; denn diese ergibt

$$(49) \qquad I = \left(\frac{a_0}{n} h^{n-1} + \frac{a_1}{n-1} h^{n-2} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{2} h + a_{n-1}\right) h.$$

Zieht man es aber vor die Integration zu vermeiden, so kann man letzteres Resultat auch mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips ableiten, indem man zwischen $R_{n-1}^{(b)}$ und $R_{n-1}^{(d)}$ in irgend einer Weise n Polytope annimmt, welche vom Raume $R_{n-1}^{(x)}$ der Reihe nach in $n-1$-dimensionalen Gebilden mit den Inhalten $a_0 x^{n-1}$, $a_1 x^{n-2}$, ..., $a_{n-2} x$, a_{n-1} geschnitten werden. Und dies ist keine schwierige Aufgabe. So kann man zur Herstellung eines Polytopes mit der Schnittformel $a_{p-1} x^{n-p}$ zunächst im $R_{n-1}^{(d)}$ zwei zueinander senkrechte Räume R_{n-p}, R_{p-1} durch einen Punkt O legen, in R_{n-p} ein Parallelotop $(Pa)_{n-p}$ mit dem Inhalte h^{n-p}, in R_{p-1} ein Parallelotop $(Pa)_{p-1}$ mit dem Inhalte a_{p-1} und in $R_{n-1}^{(b)}$ einen Punkt P annehmen; wendet man nun auf die Pyramide mit $(Pa)_{n-p}$ als Basis und P als Scheitel $(p-1)$-mal nacheinander den Prozeß der Prismenbildung an, wobei die durch den nämlichen Eckpunkt gehenden Kanten des $(Pa)_{p-1}$ der Richtung und Größe nach die aufstehenden Kanten darstellen, so ist das erzeugte Prisma $(p-1)$-ter Stufe mit pyramidaler Basis ein von $R_{n-1}^{(x)}$ in einem Prisma $(p-1)$-ter Stufe mit pyramidaler Basis vom Inhalte $a_{p-1} x^{n-p}$ geschnittenes Gebilde, dessen Inhalt nach früheren Ergebnissen das Produkt ist des Inhaltes $\frac{1}{n-p+1} h^{n-p+1}$ der pyramidalen Basis in den Inhalt a_{p-1} des $(Pa)_{p-1}$, usw.

Die Formel (48) führt die Bestimmung des Inhaltes des n-dimensionalen Prismoids auf ein bekanntes Problem der

Ebene zurück, wo es gilt den Inhalt der ebenen Figur zu bestimmen, welche von der Parabel $(n-1)$-ter Ordnung

$$y = a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-2} x + a_{n-1},$$

von der x-Achse und von den Ordinaten $x = 0$, $x = h$ eingeschlossen wird. Dieses Problem ist schon vor zwei Jahrhunderten von Cotes in dem Sinne erledigt worden, daß dieser von $n+1$ Größen abhängige Inhalt zunächst in h und den den Werten $0, \frac{h}{n-1}, \frac{2h}{n-1}, \ldots, \frac{(n-2)h}{n-1}, h$ von x entsprechenden Werten $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}, y_{n-1}$ von y ausgedrückt werden kann, so daß man hat

$$I = (b_0 y_0 + b_1 y_1 + \ldots + b_{n-2} y_{n-2} + b_{n-1} y_{n-1}) h$$

was in dem Falle des Prismoids in der Form

$$(50) \quad I = (b_0 S_0 + b_1 S_1 + \ldots + b_{n-2} S_{n-2} + b_{n-1} S_{n-1}) h,$$

erscheint, wo $S_0, S_1, \ldots, S_{n-2}, S_{n-1}$ die den Werten $0, \frac{h}{n-1}, \ldots, \frac{(n-2)h}{n-1}, h$ von x entsprechenden Schnitte bedeuten und also $S_0 = B$, $S_{n-1} = D$ ist.

Die Bestimmung der Koeffizienten b_i von (50) bietet keine Schwierigkeit. Fügt man dem Systeme von Gleichungen, welches erhalten wird, wenn man der Veränderlichen x in (48) der Reihe nach die Werte $0, \frac{h}{n-1}, \ldots, \frac{(n-2)h}{n-1}, h$ erteilt, die Gleichung (49) hinzu, so gibt die Elimination der n Größen a_i aus dem ganzen Systeme von $n+1$ Gleichungen das gewünschte Resultat in Determinantenform. So hat man für $n = 4$ das System

$$\left.\begin{array}{rcccccc} S_0 = & & & & & & a_3 \\ S_1 = & a_0\left(\frac{h}{3}\right)^3 & + & a_1\left(\frac{h}{3}\right)^2 & + & a_2\frac{h}{3} & + a_3 \\ S_2 = & a_0\left(\frac{2h}{3}\right)^3 & + & a_1\left(\frac{2h}{3}\right)^2 & + & a_2\frac{2h}{3} & + a_3 \\ S_3 = & a_0 h^3 & + & a_1 h^2 & + & a_2 h & + a_3 \\ I = & \frac{1}{4} a_0 h^4 & + & \frac{1}{3} a_1 h^3 & + & \frac{1}{2} a_2 h^2 & + a_3 h \end{array}\right\}.$$

Deshalb gibt die Elimination der vier Größen a_0, a_1, a_2, a_3

$$\begin{vmatrix} S_0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ S_1 & (\frac{1}{3})^3 & (\frac{1}{3})^2 & (\frac{1}{3}) & 1 \\ S_2 & (\frac{2}{3})^3 & (\frac{2}{3})^2 & \frac{2}{3} & 1 \\ S_3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{I}{h} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

was sich mittels der Zwischenformen

$$\begin{vmatrix} S_1 - S_0 & (\frac{1}{3})^3 & (\frac{1}{3})^2 & \frac{1}{3} \\ S_2 - S_0 & (\frac{2}{3})^3 & (\frac{2}{3})^2 & \frac{2}{3} \\ S_3 - S_0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{I}{h} - S_0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} S_2 - 2S_1 + S_0 & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ S_3 - 3S_1 + 2S_0 & \frac{8}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{I}{h} - \frac{3}{2}S_1 + \frac{1}{2}S_0 & \frac{7}{36} & \frac{1}{6} \end{vmatrix} = 0,$$

$$3(S_2 - 2S_1 + S_0) + (S_3 - 3S_1 + 2S_0) - 8\left(\frac{I}{h} - \tfrac{3}{2}S_1 + \tfrac{1}{2}S_0\right) = 0$$

auf

$$I = \frac{h}{8}(S_0 + 3S_1 + 3S_2 + S_3)$$

reduzieren läßt.

[Reduziert sich die rechte Seite von (48) auf $(x+p)^{n-1}$, so hat man nach den Prinzipien der Integralrechnung

$$I = \frac{(h+p)^n - p^n}{n}.$$

Durch Vergleichung mit (50) findet man also die Beziehung

$$\frac{(h+p)^n - p^n}{h} = n\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{hk}{n-1} + p\right)^{n-1} b_k,$$

und diese Beziehung muß offenbar für alle Werte von p gelten. Deshalb ergibt sich für $n = 4$ das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} b_0 + b_1 + b_2 + b_3 &= 1 \\ b_1 + 2b_2 + 3b_3 &= \tfrac{3}{2} \\ b_1 + 2^2 b_2 + 3^2 b_3 &= 3 \\ b_1 + 2^3 b_2 + 3^3 b_3 &= \tfrac{27}{4} \end{aligned}\right\},$$

welches zu obigen Resultaten zurückführt.]

Die Koeffizienten b_i, auf deren Berechnung wir nicht weiter eingehen, zeigen die Regelmäßigkeit, daß sie bei Umkehrung der Reihenfolge sich nicht ändern. Offenbar muß dies schon deshalb der Fall sein, weil die Gleichung (50) für I den nämlichen Wert wie oben liefern muß, wenn man die Abstände $0, \frac{h}{n-1}, \ldots, \frac{(n-2)h}{n-1}, h$ anstatt von der Seite von $R^{(b)}_{n-1}$ von der Seite von $R^{(d)}_{n-1}$ aus rechnet. Also kann (50) durch die beiden einfacheren Formeln

$$(51)\quad \begin{cases} & n \text{ gerade} \\ I = h\left[c_0(S_0 + S_{n-1}) + c_1(S_1 + S_{n-2}) + \ldots + c_{\frac{n}{2}-1}\left(S_{\frac{n}{2}-1} + S_{\frac{n}{2}}\right)\right], \\ & n \text{ ungerade} \\ I = h\left[c_0(S_0 + S_{n-1}) + c_1(S_1 + S_{n-2}) + \ldots + c_{\frac{n-1}{2}} S_{\frac{n-1}{2}}\right] \end{cases}$$

ersetzt werden und man findet bis $n = 11$ einschließlich für die Koeffizienten c_i die in folgender Tabelle niedergelegten Werte $c_i = \frac{c'_i}{m}$.

n	c'_0	c'_1	c'_2	c'_3	c'_4	c'_5	m
3	1	4				. . .	6
4	1	3					8
5	7	32	12				90
6	19	75	50				288
7	41	216	27	272			840
8	751	3577	1323	2989			17280
9	989	5888	−928	10496	−4540		28350
10	2857	15741	1080	19344	5778		89600
11	16067	106300	−48525	272400	−260550	427368	598752

Merkwürdigerweise ist es — vergleiche einen kleinen Aufsatz des Verfassers (*Comptes rendus*, Bd. 122, S. 1113, 1896) — fast zwei Jahrhunderte lang nicht bemerkt worden, daß die für $n = 2n' - 1$ gewonnene Formel auch noch gilt für $n = 2n'$; dieses neue Theorem, entsprossen aus der von D. J. Korteweg herrührenden Bemerkung, daß die bekannte Formel für den Inhalt des dreidimensionalen Prismoids erst

für $n = 5$ ihre Gültigkeit verliert, ist der Reihe nach vom Verfasser, von Korteweg und von G. Mannoury bewiesen worden (l. c., S. 1113, 1399). Wir geben hier den ersten dieser drei Beweise. Dieser Beweis zerfällt in zwei Teile. Zunächst folgt aus (51), daß die Formeln für $n = 2n' - 1$ und für $n = 2n'$ die nämliche Anzahl von Größen c_i enthalten und der Inhalt des $2n'$-dimensionalen Prismoids sich also in h und den $2n' - 1$ Querschnitten $S_0, S_1, \ldots, S_{2n'-2}$, deren Räume R_{n-1} den Abstand $\frac{h}{2n'-2}$ voneinander haben, muß ausdrücken lassen. Und dann geht aus der Betrachtung eines besonderen $2n'$-dimensionalen Prismoids hervor, daß die Reihe der $2n' - 1$ Koeffizienten c_i für $n = 2n' - 1$ und für $n = 2n'$ die nämliche sein muß. Denkt man sich nämlich das allgemeine Prismoid des Raumes $R_{2n'-1}$ in einer zu diesem Raume senkrechten Richtung um die Strecke p parallel zu sich selbst verschoben, so entsteht ein $2n'$-dimensionales Prismoid, dessen Inhaltsformel offenbar erhalten wird, indem man die Inhaltsformel des $(2n' - 1)$-dimensionalen mit p multipliziert. Und, weil $p S_i^{2n'-1} = S_i^{2n'}$ ist, so ist hiermit die Gleichheit der Koeffizientenreihen dargetan.

44. Nachträgliche Prismoidbetrachtungen. Wir fanden, daß der Inhalt des n-dimensionalen Prismoids sich für $n = 2n' - 1$ und für $n = 2n'$ in der Höhe h und $2n' - 1$ Querschnitten ausdrücken läßt. Jetzt bemerken wir, daß die

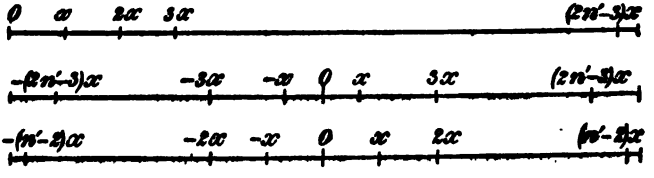


Fig. 37.

Antwort auf die Frage, ob hiermit das mögliche erreicht sei, wenigstens von theoretischer Seite her verneinend lauten muß, indem man beweisen kann, daß es für $n = 2n' - 1$ Formeln gibt, welche außer h eine geringere Anzahl von Querschnitten enthalten. Wenn man (Fig. 37) entweder von einem der beiden parallelen Endräume $R_{n-1}^{(b)}$, $R_{n-1}^{(d)}$ abge-

rechnet die Querschnitte mit den Entfernungen $0, x, 2x, \ldots, (2n'-3)x$, oder vom Mittelraume $R^{(m)}_{n-1}$ abgerechnet die Querschnitte mit den Entfernungen $\pm x, \pm 3x, \pm 5x, \ldots, \pm(2n'-3)x$ betrachtet, so findet man, daß x sich so bestimmen läßt, daß $2n'-2$ Querschnitte ausreichen. Ja, man kann in dieser Richtung noch einen Schritt weiter gehen und beweisen, daß man für $n = 2n'-1 > 3$ die Größe x so bestimmen kann, daß man nur die $2n'-3$ Querschnitte mit den Entfernungen $0, \pm x, \pm 2x, \ldots, \pm(n'-2)x$ vom Mittelraume $R^{(m)}_{n-1}$ zu kennen braucht. Allein wir müssen uns hier mit der Erwähnung der Resultate zufrieden geben, um so mehr weil man die entsprechenden Entwicklungen im *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* (Teil XIII, S. 188—197) nachschlagen kann.

Die neuen Resultate werden durch die Formeln

$$I_3 = \frac{h}{4}\left(S_0 + 3S_{\frac{2}{3}}\right), \quad I_3 = \tfrac{1}{2}h\left(S_{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{3}} + S_{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{3}}\right),$$

$$I_5 = \frac{h}{18}\left[8S_{\frac{1}{2}} + 5\left(S_{\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\sqrt{5}} + S_{\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\sqrt{5}}\right)\right]$$

angegeben, wenn der Index bei I die Dimensionenzahl und S_k den Inhalt des parallelen Schnittes in der Entfernung kh von der Basisfläche angibt. Die beiden Ausdrücke für I_3 sind zuerst von J. de Vries abgeleitet worden.

Dritter Abschnitt.

Reguläre Polytope.

§ 5. Reguläre Polygone.

45. Allgemeine Bemerkungen. Das Studium der regulären Polygone, d. h. der Vielecke mit gleichen Seiten und gleichen Winkeln, fällt schon der Planimetrie anheim. Wir setzen deshalb wieder die einfachsten Eigenschaften dieser Figuren, z. B. daß um jedes reguläre Vieleck und in dasselbe sich ein Kreis beschreiben läßt und diese Kreise den nämlichen Mittelpunkt haben, als bekannt voraus und beschränken uns hauptsächlich auf diejenigen Betrachtungen, welche in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Planimetrie vergebens gesucht werden und dennoch für das richtige Verständnis der nachfolgenden Paragraphen unumgänglich sind.

	r_u	
Dreieck	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$= 0{,}57735$
Viereck	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$= 0{,}70711$
Fünfeck	$\frac{1}{10}\sqrt{10(5+\sqrt{5})}$	$= 0{,}85065$
Sechseck	1	$= 1$
Achteck	$\frac{1}{2}\sqrt{2(1+\sqrt{2})}$	$= 1{,}30656$
Zehneck	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$	$= 1{,}61803$

Es ist schon mehrere Jahrhunderte lang bekannt, daß die tatsächliche geometrische Konstruktion des regulären m-Ecks mittels Zirkel und Lineal ausführbar ist, wenn die Zahl m der Ecken 2^p, 3, 5, 15 oder irgend eine Kombination $3 \cdot 2^p$, $5 \cdot 2^p$, $15 \cdot 2^p$ beträgt. Die Ehre, dieses Problem der *Kreisteilung* endgültig gelöst zu haben, gebührt Gauß, welcher in seinen „Disquisitiones arithmeticae" bewies, daß die Teilung für jede Primzahl von der Form $m = 2^{2^\mu} + 1$ möglich, für alle andern Primzahlen und Primzahlpotenzen aber unmöglich ist. Für $\mu = 0$ und $\mu = 1$ fällt man wieder zurück auf die längst bekannten Fälle $m = 3$ und $m = 5$. Für $\mu = 2$, d. h. $m = 17$ ist die Lösung von Gauß selbst durchgeführt und nachher von vielen Mathematikern wiederholt worden. Eine umfangreiche Lösung des Falles $\mu = 3$, $m = 257$ veröffentlichte Richelot, und für den nächsten Fall $\mu = 4$, $m = 65537$ liegt eine in zehnjähriger Arbeit errungene Lösung von J. Hermes im Manuskript vor. Die Fälle $\mu = 5$, $\mu = 6$, $\mu = 7$ entsprechen keinen Primzahlen, und der Fall $\mu = 8$, wobei m schon 77 Ziffern zählt, ist noch nicht untersucht.

Für die regulären Bildungen höherer Dimensionenzahl brauchen wir nur die Fälle der Seitenzahlen 3, 4, 5, 6, 8, 10 näher zu erörtern; deshalb schließen wir diese einleitenden Betrachtungen mit folgender Tabelle ab, wo die Radien r_u und r_i des Umkreises und des Inkreises durch die Seite und der Inhalt durch das Quadrat der Seite als Einheit ausgedrückt sind.

r_i		I	
$\frac{1}{6}\sqrt{3}$	$= 0{,}28867$	$\frac{1}{4}\sqrt{3}$	$= 0{,}43301$
$\frac{1}{2}$	$= 0{,}5$	1	$= 1$
$\frac{1}{10}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$= 0{,}68819$	$\frac{1}{4}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$= 1{,}72048$
$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$= 0{,}86602$	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$= 2{,}59807$
$\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$	$= 1{,}20711$	$2(1+\sqrt{2})$	$= 4{,}82843$
$\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$= 1{,}53884$	$\frac{5}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$= 7{,}69418$

46. Diagonalen. Sternpolygone. Zeichnet man in ein reguläres Pentagon $P_1P_2P_3P_4P_5$ die fünf Diagonalen hinein, so entsteht ein *Sternfünfeck*, von welchem diese Diagonalen die Seiten sind. Es muß dieses Fünfeck ebenfalls als ein reguläres betrachtet werden; denn die Seiten P_1P_3, P_3P_5, P_5P_2, P_2P_4, P_4P_1 sind einander gleich und alle Winkel 36^0. Deshalb wird dieses Fünfeck ein „reguläres Fünfeck zweiter Art" genannt. Von diesem Fünfeck heißt $P_1P_2P_3P_4P_5$ das einhüllende Polygon, das kleinere eingeschlossene konvexe Fünfeck das Kernpolygon.

Obenstehende Tatsache kann in die folgende allgemeine Form gekleidet werden. Ist auf einem Kreise irgend ein Bogen gegeben, so kann man diesen Bogen von einem bestimmten Punkte A_1 an in einem bestimmten Sinne fortschreitend immer wieder auf den Kreis abtragen und durch Verbindung der auffolgenden Teilpunkte A_1, A_2, A_3, ... eine „regelmäßig gebrochene Linie" $A_1A_2A_3$ ... erzeugen. Dabei können dann drei verschiedene Fälle eintreten. Wird der Quotient des Zentriwinkels 2α des Bogens in 360^0 mit q bezeichnet, so kann q entweder eine ganze Zahl, oder ein unechter Bruch, oder eine irrationale Zahl sein. Im ersten und im zweiten Falle entstehen ein gewöhnliches und ein außerordentliches reguläres Polygon; im dritten Falle schließt die regelmäßig gebrochene Linie sich nicht und wird der Umfang des Kreises von den Ecken, das ringförmige Stück der Ebene zwischen dem gegebenen und einem konzentrischen Kreise von den Seiten der gebrochenen Linie überdeckt. Und nun spricht man im zweiten Falle, wo $q = \frac{q_1}{q_2}$ ist und die ganzen Zahlen q_1 und q_2 relativ prim vorausgesetzt werden, von einem regulären q_1-Eck q_2-ter Art, wobei dann die gewöhnlichen konvexen regulären Vielecke als reguläre Vielecke erster Art erscheinen.

Weil jede Diagonale eines regulären Vielecks den Umfang des Umkreises in zwei Teile zerlegt und diese Teile ungleich sind, wenn die Diagonale Seite eines regulären Vielecks höherer Art ist, so kann man bei der Angabe der Art dieses Vielecks immer den kleineren der beiden Teile benutzen, d. h. es kann immer $q_2 < \frac{q_1}{2}$ vorausgesetzt werden.

Also gibt es so viele verschiedene reguläre q_1-Ecke als es Zahlen $q_2 < \frac{q_1}{2}$ gibt, welche zu q_1 relativ prim sind. So ist für q_1 von 3 bis 10 das System der möglichen Werte von q_2 in folgender Tabelle gegeben.

3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1
		2		2	3	2	3
				3		4	

Also gibt es ein Drei-, Vier- und Sechseck, zwei Fünf-, Acht- und Zehnecke, drei Sieben- und Neunecke, usw.

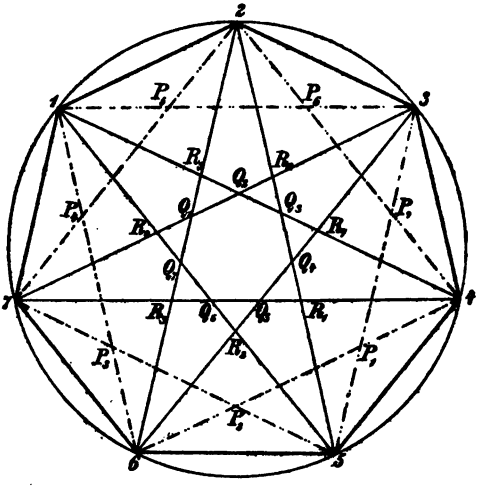


Fig. 38.

So gibt Fig. 38 die drei verschiedenen Arten von regulären Siebenecken an; es entsprechen ihnen die Reihenfolgen

1 2 3 4 5 6 7, 1 3 5 7 2 4 6, 1 4 7 3 6 2 5

der Ecken. Und den Siebenecken zweiter und dritter Art entsprechen die Kernpolygone $P_1P_2 \ldots P_7$ und $Q_1Q_2 \ldots Q_7$.

Nicht nur durch das Hineinzeichnen von Diagonalen gleicher Länge in ein reguläres Polygon, auch durch Verlängerung der in einer regelmäßig geänderten Reihenfolge genommenen Seiten eines regulären Polygons entstehen Sternpolygone. Wenn es p verschiedene reguläre m-Ecke gibt, so erhält man nach einem leicht zu erhärtenden allgemeinen Satze für $q < p$ ein reguläres m-Eck $(q+1)$-ter Art, wenn man von den Seiten eines regulären m-Ecks q-ter Art die erste, dritte, fünfte ... als aufeinanderfolgende betrachtet und irgend zwei aufeinanderfolgende Seiten verlängert bis sie sich schneiden. So ergibt das Siebeneck erster Art $Q_1 Q_2 \dots Q_7$ (Fig. 38) das Siebeneck zweiter Art $R_6 R_1 R_3 R_5 R_7 R_2 R_4$ und dieses das Siebeneck dritter Art 2 6 3 7 4 1 5.

Aufgabe 51. Zeige, daß die Diagonalen des regulären m-Ecks erster Art einander im Innern des Vielecks in $(m)_4$ Punkten schneiden, wenn man bei geradem m die vielfachen Schnittpunkte in einfache auflöst.

Aufgabe 52. Gib die Teile an, in welche ein reguläres Elfeck von seinen Diagonalen zerschnitten wird.

[Man findet im ganzen 375 Stücke.]

Werden die Eckpunkte und Kanten eines regulären m-Ecks p-ter Art durch Geradensegmente und dreieckige Ebenenstücke mit irgend einem Punkte O eines im Mittelpunkte M des Vielecks auf der Vielecksebene errichteten Lots verbunden, so entsteht ein „reguläres dreidimensionales m-Kant p-ter Art" mit O als Scheitel und OM als Achse. Und umgekehrt wird jedes reguläre m-Kant p-ter Art durch irgend eine Ebene seines Raumes senkrecht zur Achse in einem regulären m-Eck p-ter Art geschnitten. Diese Bemerkung, aus welcher sofort hervorgeht, unter welchen Bedingungen zwei reguläre m-Ecke p-ter Art kongruent sind, wird uns später nützlich sein.

47. Berechnung von Seiten und Diagonalen. Ist 2α wieder der Zentriwinkel des Kreisbogens, welcher von der Seite oder irgend einer Diagonale des regulären m-Ecks unterspannt wird, so ist $2m\alpha$ ein Vielfaches von $360°$ und also $m\alpha$ ein Vielfaches von $180°$, d. h. man hat $\sin m\alpha = 0$. Also muß die Länge x der in Rede stehenden Seite oder Diagonale ausgedrückt durch die Länge des Radius als Einheit, welche mittels der Beziehung $x = 2\sin\alpha$ mit α zusammenhängt, aus

der Bedingung $\sin m\alpha = 0$ zu berechnen sein. Wirklich gibt die bekannte Moivresche Formel die Transformationsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} m \text{ ungerade } .. \sin m\alpha &= \Big[(m)_1 (1-\sin^2\alpha)^{\frac{m-1}{2}} \\ -(m)_3 (1-\sin^2\alpha)^{\frac{m-3}{2}} \sin^2\alpha + \ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin^{m-1}\alpha \Big] \sin\alpha, \\ m \text{ gerade } .. \sin m\alpha &= \Big[(m)_1 (1-\sin^2\alpha)^{\frac{m-2}{2}} \\ -(m)_3 (1-\sin^2\alpha)^{\frac{m-4}{2}} \sin^2\alpha + \ldots & \\ + (-1)^{\frac{m-2}{2}} (m)_1 \sin^{m-1}\alpha \Big] \sin\alpha\cos\alpha \end{aligned}\right\},$$

welche nach Unterdrückung der leicht geometrisch zu deutenden Werte $\alpha = 0^0$ und $\alpha = 180^0$ die Bedingung $\sin m\alpha = 0$ mittels der Substitution $\sin\alpha = \frac{x}{2}$ in

$$\left.\begin{aligned} m \text{ ungerade } \ldots (m)_1 (4-x^2)^{\frac{m-1}{2}} - (m)_3 (4-x^2)^{\frac{m-3}{2}} x^2 + \ldots \\ + (-1)^{\frac{m-1}{2}} x^{m-1} = 0, \\ m \text{ gerade } \ldots (m)_1 (4-x^2)^{\frac{m-2}{2}} - (m)_3 (4-x^2)^{\frac{m-4}{2}} x^2 + \ldots \\ + (-1)^{\frac{m-2}{2}} (m)_1 x^{m-2} = 0 \end{aligned}\right\}$$

überführen. So findet man die in der folgenden Tabelle niedergelegten Resultate, wobei um Raum zu sparen nicht die auf Null reduzierten Gleichungen, sondern bloß ihre linken Seiten angegeben worden sind.

m		
3	$x^3 - 3$	$x^3 - 3$
4	$x^2 - 2$	$x^2 - 2$
5	$x^4 - 5x^3 + 5$	$x^4 - 5x^3 + 5$
6	$x^4 - 4x^3 + 3$	$(x^2 - 1)(x^3 - 3)$
7	$x^6 - 7x^4 + 14x^3 - 7$	$x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7$
8	$x^6 - 6x^4 + 10x^3 - 4$	$(x^4 - 4x^3 + 2)(x^2 - 2)$
9	$x^8 - 9x^6 + 27x^4 - 30x^3 + 9$	$(x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 3)(x^2 - 3)$
10	$x^8 - 8x^6 + 21x^4 - 20x^3 + 5$	$(x^4 - 3x^3 + 1)(x^4 - 5x^3 + 5)$
11	$x^{10} - 11x^8 + 44x^6 - 77x^4 + 55x^2 - 11$	$x^{10} - 11x^8 + 44x^6 - 77x^4 + 55x^2 - 11$
12	$x^{10} - 10x^8 + 36x^6 - 56x^4 + 35x^2 - 6$	$(x^4 - 4x^3 + 1)(x^2 - 3)(x^2 - 2)(x^2 - 1)$

Es stimmen die Ergebnisse dieser neuen Tabelle mit denjenigen der vorhergehenden überein: jedesmal ist die Ordnung der fettgedruckten algebraischen Formen in x^2 der Anzahl dieser Vielecke gleich. So erhält man für $m = 5$ die bekannten Werte $\frac{1}{2}\sqrt{2(5 \mp \sqrt{5})}$ von Seite und Diagonale; so scheiden sich für $m = 12$ die für $m = 3$, $m = 4$, $m = 6$ gefundenen Werte aus, usw.

Aufgabe 53. Ist $S_{m,p}$ die Seite des regulären m-Ecks p-ter Art — immer wieder in Teilen des Radius als Einheit —, so gelten nach G. Dostor (Liouvilles Journal, T. 4 der dritten Reihe, S. 343) die Beziehungen

$$S_{m,p} \cdot S_{2m,m-2p} = S_{m,m-2p}, \quad S^2_{m,p} + S^2_{2m,m-2p} = 4,$$
$$S_{2m,p} \cdot S_{2m,m-p} = S_{m,m-p}, \quad S^2_{2m,p} + S^2_{2m,m-p} = 4.$$

Wie werden sie bewiesen?

48. Reguläre Vielecke und Gruppentheorie. Die verschiedenen Drehungen einer ebenen Figur in ihrer Ebene bilden bekanntlich eine Gruppe; denn die Änderung der Lage, welche die Figur durch zwei nacheinander sogar um verschiedene Mittelpunkte ausgeführte Drehungen erleidet, ist im allgemeinen durch eine einzige Drehung um einen bestimmten dritten Mittelpunkt zu erzielen. Diese Gruppe enthält unendlich viele Operationen; man nennt sie eine unendliche Gruppe.

Unter den endlichen Gruppen ist die Gruppe der Drehungen, welche ein reguläres m-Eck in sich selbst transformieren, durch ihre durchsichtige Einfachheit wichtig. Weil man diese Drehungen in einem bestimmten Sinne zählt und dabei dann natürlich auch ganze Vielfache von 2π unberücksichtigt läßt, ist die Zahl der Operationen, d. h. der Grad der Gruppe, der Zahl m der Drehungswinkel $\frac{2\pi}{m}$, $\frac{4\pi}{m}, \ldots, \frac{2(m-1)\pi}{m}$, 2π, d. h. $\frac{2k\pi}{m}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, gleich; von diesen Drehungen wird die um 2π — oder 0 —, welche die Figur in die ursprüngliche Lage zurückführt — oder sogar nicht bewegt —, die *identische* Operation genannt. Und die *Periode* irgend einer Operation, d. h. die Zahl, welche angibt, wie oft eine Drehung nach-

einander ausgeführt werden muß, um die Figur in die ursprüngliche Lage zurückzubringen, ist m, oder, falls m keine Primzahl ist, möglicherweise ein Faktor von m. So hat beim Siebeneck jede der sechs von der identischen Operation verschiedenen Drehungen die Periode sieben, während beim Achteck jede der Drehungen $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ die Periode acht, jede der Drehungen $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ die Periode vier und die Drehung π die Periode zwei besitzt.

Die hier besprochenen „zyklischen Rotationsgruppen" stehen im engsten Zusammenhange mit den Betrachtungen

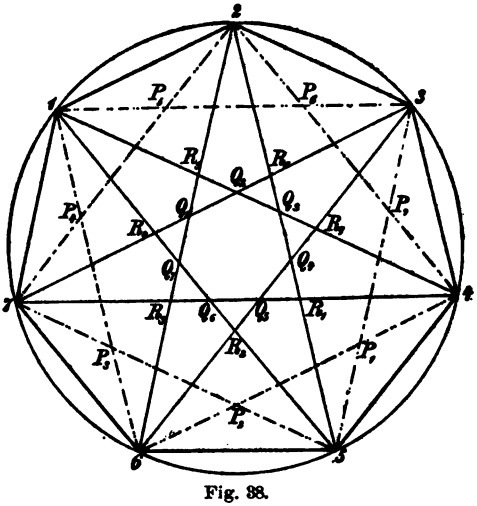


Fig. 38.

der vorhergehenden Nummer. Führt man z. B. beim Siebeneck die drei Operationen, welche in Drehungen um $\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}$ bestehen, jede für sich siebenmal nacheinander aus, so durchläuft die Ecke 1 (Fig. 38) jedesmal mit 1 selbst anfangend der Reihe nach die Eckenfolgen 1 2 3 4 5 6 7, 1 3 5 7 2 4 6, 1 4 7 3 6 2 5 der Siebenecke erster, zweiter, dritter Art, und

in derselben Weise leisten die Drehungen um $\frac{8\pi}{7}, \frac{10\pi}{7}, \frac{12\pi}{7}$ das nämliche mit Umkehrung der Reihenfolge dieser drei Vielecke und der Eckenfolge jedes von ihnen. Und beim Achteck entsprechen den Drehungen $\frac{\pi}{4}$ $\left(\text{oder } \frac{7\pi}{4}\right)$ und $\frac{3\pi}{4}$ $\left(\text{oder } \frac{5\pi}{4}\right)$ die Achtecke 1 2 3 4 5 6 7 8 und 1 4 7 2 5 8 3 6 erster und zweiter Art und löst das Achteck sich für die Drehung $\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{oder } \frac{3\pi}{2}\right)$ in die zwei Quadrate 1 3 5 7, 2 4 6 8, und für die Drehung π in die vier Zweiecke 1 5, 2 6, 3 7, 4 8 auf. Oder: versteht man unter *Untergruppe* jedes System von Operationen einer Gruppe, welches für sich genommen den Gruppencharakter besitzt, so heißt es in der Sprache der Gruppentheorie, daß die zyklische Rotationsgruppe achten Grades zwei Untergruppen vierten Grades und vier Untergruppen zweiten Grades zuläßt.

Sind O_1 und O_2 irgend zwei Operationen der nämlichen Gruppe, so versteht man unter dem Produkte $O_1 O_2$ diejenige Operation der Gruppe, welche für sich allein das nämliche leistet, was erreicht wird, wenn man zunächst die Operation O_1 und sodann die Operation O_2 ausführt. Nach dieser Bezeichnungsweise, welche unmittelbar auf Potenzen ausgedehnt werden kann, gilt für jede Operation O der zyklischen Rotationsgruppe vom Grade m die Beziehung $O^m = 1$.

Aufgabe 54. Wie ist die aus $O^m = 1$ folgende Gleichung $O = \sqrt[m]{1}$ geometrisch zu deuten?

[Man denke an die Identität $\sqrt[m]{1} = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}$ in Verbindung mit der Darstellung des Punktes (x, y) mittels des Vektors $z = x + iy$.]

Sind O_1 und O_2 irgend zwei Operationen der nämlichen Gruppe, so ist $O_1 O_2$ im allgemeinen von $O_2 O_1$ verschieden. Gilt in einem besonderen Falle die Gleichung $O_1 O_2 = O_2 O_1$, so nennt man die Operationen O_1 und O_2 *vertauschbar*.

Aus obigen Entwicklungen geht zur Genüge hervor, daß die Gruppe der zyklischen Rotationen vom Grade m vom gruppentheoretischen Standpunkte aus wesentlich identisch ist mit der Gruppe der zyklischen Permutationen

der natürlichen Zahlenreihe von 1 bis m. Und dabei ist es dann wieder einerlei, ob man sich diese Zahlen am Umfange eines Kreises gleichmäßig verteilt oder in gerader Linie niedergeschrieben denkt, wenn man im letzteren Falle nur nicht vergißt, daß die Ziffern an den Endstellen aneinander grenzen. So ist die Gruppe der zyklischen Permutationen 1 2 3 4 5, 2 3 4 5 1, 3 4 5 1 2, 4 5 1 2 3, 5 1 2 3 4 der Ziffern von 1 bis 5, welche durch das Symbol (1 2 3 4 5) bezeichnet werden mag, nicht nur „ähnlich" mit der Gruppe der Drehungen des regulären Fünfecks, sondern in den gruppentheoretischen Eigenschaften mit dieser letzteren Gruppe völlig identisch; dabei vertreten dann die Transformationen von 1 2 3 4 5 in die fünf angewiesenen Permutationen die fünf Operationen.

Zwei Gruppen heißen *isomorph*, wenn man ihre Operationen O, O' einander derart zuordnen kann, daß die Produkte $O_p O_q$ und $O'_p O'_q$ einander entsprechen, sobald O_p der O'_p und O_q der O'_q entspricht. Ist diese isomorphe Beziehung eine wechselseitig eindeutige, so sind beide Gruppen in ihren gruppentheoretischen Eigenschaften identisch und also nur in der Art ihrer Operationen verschieden.

49. Symmetrieachsen der regulären Vielecke. Das Zweiflach. Beim $(2m+1)$-Eck sind zwei Gegenelemente voneinander verschieden, indem einem Eckpunkte eine Seite gegenüberliegt; beim $2m$-Eck sind zwei Gegenelemente immer gleichartig, entweder zwei Eckpunkte oder zwei Seiten. Dieser Unterschied spricht sich auch in den Symmetrieachsen aus. Beim $(2m+1)$-Eck treten $2m+1$ gleichwertige Symmetrieachsen auf, deren jede eine Ecke mit der Mitte der Gegenseite verbindet; beim $2m$-Eck gibt es zwei Gruppen von je m Symmetrieachsen, eine Gruppe von Verbindungsgeraden zweier Gegenecken und eine Gruppe von Verbindungsgeraden der Mitten zweier Gegenseiten.

Ihrer Natur nach ist irgend eine Symmetrieachse eines regulären Vielecks dadurch ausgezeichnet, daß Faltung der Figur längs dieser Linie die beiderseitigen Teile miteinander zur Deckung bringen kann. Für die Gruppentheorie wichtiger ist jedoch die Bemerkung, daß das reguläre Vieleck durch Umlegung ($\mathrm{I}\,1\,1\,2_{1_2}$) um eine seiner Symmetrieachsen mit sich selbst zur Deckung gebracht und also auch in sich

selbst transformiert wird, abgesehen von der Tatsache, daß die beiden Seiten der das Vieleck tragenden Ebene dabei ineinander übergehen. An und für sich bilden die m Umlegungen des regulären m-Ecks aber keine Gruppe; denn nach zwei Umlegungen sind die beiden Seiten der Ebene wieder in ihrer ursprünglichen Lage angelangt, d. h. das Produkt zweier Umlegungen ist keine Umlegung sondern eine Drehung. Deshalb kann bei den Umlegungen nur dann von einer Gruppe die Rede sein, wenn man Drehungen und Umlegungen zusammen als „Transformationen des Vielecks in sich" betrachtet; von dieser neuen „erweiterten" Gruppe bilden die Drehungen dann selbstverständlich eine Untergruppe.

Um das Material der aus den Drehungen und Umlegungen des regulären m-Ecks bestehenden Gruppe richtiger verwerten zu können, müssen wir zum Falle der zwei Operationen P, Q einer Gruppe G_m vom Grade m, für welche die Produkte PQ und QP voneinander verschieden sind, zurückkehren. Bezeichnet man allgemein, der Identität $OO^{-1} = 1$ der Algebra entsprechend, diejenige Operation, welche die gegebene Operation O aufzuheben imstande ist, mit O^{-1}, so gibt die Multiplikation der Ungleichung $PQ \neq QP$ mit P^{-1} die Beziehung $PQP^{-1} \neq Q$. Allein es ist PQP^{-1}, obgleich von Q verschieden, selbstverständlich eine Operation Q' von G_m. Und diese Operation Q' stimmt in ihrer Periode mit Q überein. Ist nämlich $Q^q = 1$, so ist auch $Q'^q = 1$; denn unterdrückt man im Produkte Q'^q der q Faktoren PQP^{-1} die unmittelbar aufeinanderfolgenden Faktoren P^{-1} und P, so ergibt sich PQ^qP^{-1}, d. h. PP^{-1}, d. h. die Einheit. Dieser Übereinstimmung wegen nennt man die Operationen Q und $Q' = PQP^{-1}$ *gleichberechtigt*.

Wir betrachten nun weiter den Fall, wo die Gruppe G_m eine Untergruppe $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ vom Grade k besitzt, und schließen jede dieser k Operationen zwischen P und P^{-1} ein, wobei P wieder eine andere Operation von G_m bedeutet. Dann erhalten wir offenbar eine Untergruppe von k Operationen $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_k$; denn aus $Q_rQ_s = Q_t$ folgt unmittelbar $(PQ_rP^{-1})(PQ_sP^{-1}) = PQ_tP^{-1}$, d. h. $Q'_rQ'_s = Q'_t$. Hierbei können nun aber zwei ganz verschiedene Fälle eintreten; es können nämlich die zwei Untergruppen (Q_i) und (Q'_i) voneinander verschieden sein und dann *gleichberechtigte* Untergruppen

heißen, oder sie können als ganze Gebilde miteinander identisch sein und wie man sagt eine *ausgezeichnete* Untergruppe bilden.

Die Anwendung dieser Theorie auf das geometrische Beispiel der überhaupt möglichen Transformationen eines regulären m-Ecks in sich gestaltet sich besonders einfach, wenn sie eingekleidet wird in die Form, welche F. Klein ihr gegeben hat in seinen schönen „Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade" (Leipzig, Teubner, 1884), welchem Werke wir obige gruppentheoretische Terminologie entnommen haben. Dabei denkt man sich den Umkreis des regelären m-Ecks als Äquator einer Erdkugel mit den Polen N und S, deren Beweglichkeit beschränkt ist bis auf Drehungen um ein Vielfaches von $\frac{2\pi}{m}$ um die *Hauptachse* NS und Drehungen um einen Winkel π um eine der m Symmetrieachsen des m-Ecks, welche *Nebenachsen* heißen mögen. Um Verwirrung vorzubeugen, hat man dann aber von vornherein festzustellen, was man unter diesen Bewegungen verstehen soll, wenn die Kugel schon vorher aus ihrer ursprünglichen Lage herausgebracht ist. Zu diesem Zwecke setze man voraus, daß die Eckpunkte des Vielecks zweimal angegeben sind, — einmal als

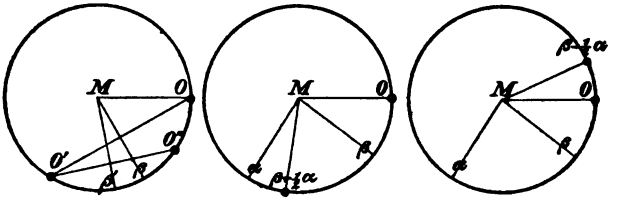


Fig. 39.

bewegliche Elemente auf der Kugel, das andere Mal als *feste* Elemente in der Umgebung, — und daß die Angabe der Achse, um welche herum irgend eine Drehung stattfinden soll, sich nun immer auf die festen Elemente bezieht. Bezeichnet nun D_α eine Drehung um NS, von N aus gesehen im Sinne des Uhrzeigers, um den Winkel α, und U_β eine Umlegung um die Nebenachse MT, für welche der im angegebenen Sinne gezählte Winkel OMT den Wert β hat, so findet man zunächst die drei Gleichungen

(52) $U_\beta U_{\beta'} = D_{2(\beta'-\beta)}$, $U_\beta D_\alpha = U_{\beta+\frac{1}{2}\alpha}$, $D_\alpha U_\beta = U_{\beta-\frac{1}{2}\alpha}$.

Achtet man auf die Pole allein, so ist es klar, daß das Produkt zweier gleichartiger Bewegungen eine Drehung, das Produkt zweier ungleichartiger Bewegungen eine Umlegung liefern muß. Und weiter erläutern die drei Figuren 39 (Seite 147) die Maßverhältnisse.

Mit Hilfe der Gleichungen (52) findet man

$$(53) \qquad \begin{cases} D_\alpha U_\beta D_\alpha^{-1} = U_{\beta-\frac{1}{2}\alpha} D_\alpha^{-1} = U_{\beta-\alpha} \\ U_\beta D_\alpha U_\beta \;\; = U_{\beta+\frac{1}{2}\alpha} U_\beta \;\; = D_{-\alpha}. \end{cases}$$

Von diesen Gleichungen (53) ist besonders die zweite wichtig; denn sie zeigt, daß die Einschließung irgend einer Drehung zwischen zwei gleichen Umlegungen das Zeichen der Drehung umkehrt. Hieraus ergibt sich, daß in der erweiterten Gruppe (D, U) die zyklische Rotationsgruppe (D) eine ausgezeichnete Untergruppe ist.

Ersetzt man das reguläre m-Eck wieder durch die in gerader Linie geschriebene Reihe der Zahlen von 1 bis m, so entspricht irgend einer bestimmten Umlegung eine bestimmte Umkehrung der Reihenfolge. So ist die erweiterte Gruppe $(D, U)_5$ des regulären Pentagons, oder die Gruppe des *Zweiflachs* vom Grade fünf, identisch mit der Gruppe

$$\left.\begin{matrix} 1\,2\,3\,4\,5, & 2\,3\,4\,5\,1, & 3\,4\,5\,1\,2, & 4\,5\,1\,2\,3, & 5\,1\,2\,3\,4 \\ 1\,5\,4\,3\,2, & 3\,2\,1\,5\,4, & 5\,4\,3\,2\,1, & 2\,1\,5\,4\,3, & 4\,3\,2\,1\,5 \end{matrix}\right\},$$

welche aus der zyklischen Rotationsgruppe (1 2 3 4 5) und jenen Umkehrungen von 1 2 3 4 5 besteht, wobei nacheinander jede der Ecken ihren Platz beibehält. Letztere Gruppe (vom Grade zehn) wird gewöhnlich die *metazyklische* Gruppe vom Grade fünf genannt.

50. Halbreguläre Polygone. Versteht man unter „Ecke" B eines Vielecks $ABCD\ldots$ die Figur ABC mit den zwei Seiten AB, BC und dem Winkel ABC zu Elementen und unter „Kante" BC dieses Vielecks die Figur $bBCc$ mit den zwei Winkeln $ABC = b$, $BCD = c$ und der Seite BC zu Elementen, so kann man von *gleicheckigen* und *gleichkantigen* Vielecken reden. So hat ein gleicheckiges Vieleck gleiche Winkel und abwechselnd gleiche Seiten, ein gleichkantiges Vieleck gleiche Seiten und abwechselnd gleiche Winkel; so ist unter den

Vierecken ein Rechteck ein gleicheckiges, ein Rhombus ein gleichkantiges Polygon. Und die beiden Systeme von gleicheckigen und gleichkantigen Vielecken bilden zusammen die *halbregulären* Polygone.

Aufgabe 55. Beweise, daß die Gruppe der Transformationen in sich des halbregulären $2m$-Ecks mit derjenigen des regulären m-Ecks identisch ist.

Aufgabe 56. Zeige, daß die polar-reziproke Figur eines gleicheckigen $2m$-Ecks in bezug auf den Umkreis ein gleichkantiges $2m$-Eck ist, welches diesen Kreis zum Inkreis hat.

Unter *Zentriwinkel* verstehen wir beim gleicheckigen Vielecke (Fig. 40[a]) den von den senkrecht auf zwei aufeinanderfolgenden Seiten gefällten Radien MP', MQ' des Umkreises, beim gleichkantigen Vielecke (Fig. 40[b]) den von den nach den Endpunkten einer Seite hingehenden Radien MA',

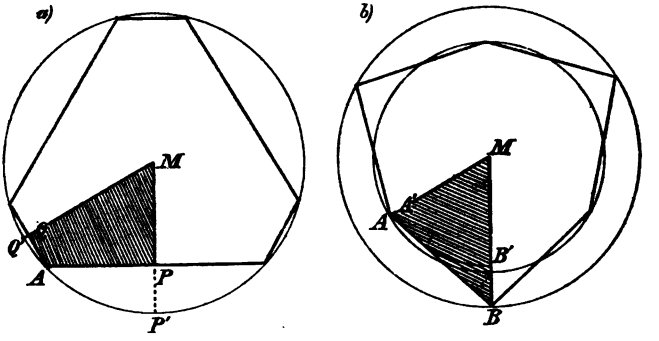


Fig. 40.

MB' des Inkreises gebildeten Winkel; weiter möge beim gleicheckigen Vieleck das Viereck $APMQ$ ein *Zentrisviereck*, beim gleichkantigen Vieleck das Dreieck ABM ein *Zentridreieck* heißen.

Bei der oben gegebenen Definition der halbregulären Polygone denkt man in erster Linie an halbreguläre $2m$-Ecke mit einem Zentriwinkel $\frac{\pi}{m}$. Allein es gibt auch *halbreguläre*

Sternpolygone mit einem Zentriwinkel $\frac{k\pi}{m}$, wo die ganze Zahl k zu m relativ prim ist; von diesen sind in Fig. 41 zwei Beispiele für $m = 5$ vorgeführt. Die Schraffierung in der gleicheckigen Figur möge zeigen, wie schwer es ist, hier innen

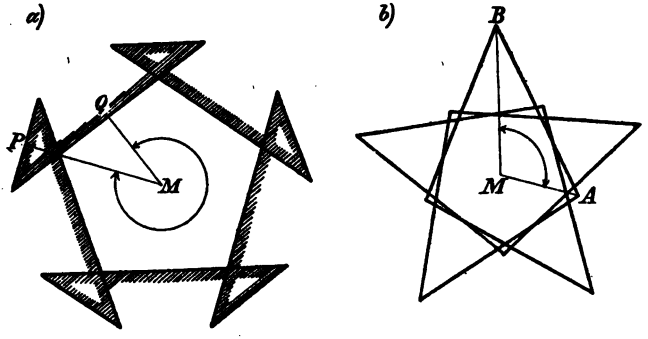


Fig. 41.

und außen zu unterscheiden; auf diesen Punkt gehen wir aber nicht tiefer ein.

51. Die ebenen Netze. Der Winkel eines regulären m-Ecks beträgt $\frac{m-2}{m}\pi$; deshalb können nur diejenigen regulären m-Ecke eine lückenlose Überdeckung der unendlichen Ebene liefern, für welche $2 : \frac{m-2}{m}$, d. h. $\frac{2m}{m-2}$, eine ganze Zahl ist. So findet man die drei Überdeckungen mittels gleichseitiger Dreiecke, Quadrate, regulärer Sechsecke, von welchen dann der Reihe nach in einem Eckpunkte des Netzes sechs, vier, drei zusammenstoßen.

Es liegt der Gedanke nahe, zur regelmäßigen lückenlosen Überdeckung der Ebene verschiedenartige reguläre Polygone zu verwenden, wobei dann in jedem Eckpunkte des bezüglichen Netzes natürlich eine bestimmte Anzahl von jeder der Polygonarten zusammentreffen soll. Sind $P_1, P_2, P_3 \ldots$ die Winkel dieser Polygone in Graden ausgedrückt und

$p_1, p_2, p_3 \ldots$ die entsprechenden Vielfachheitszahlen, so muß also der Gleichung

$$(54) \qquad p_1 P_1 + p_2 P_2 + p_3 P_3 + \ldots = 360$$

Genüge geleistet werden. Nun ist 60 der kleinste Wert der Größen P_i; also ist die Summe der p_i höchstens 6 und deshalb jeder der Fälle $m = 7, 11, 13, \ldots$ auszuschließen. Und für die den Fällen $m = 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots$ entsprechenden Werte 60, 90, 108, 120, 135, 140, 144, 150, ... von P_i ergeben sich nun leicht, wie Badoureau im Jahre 1878 wohl zuerst vollständig nachgewiesen hat, sieben Lösungen, von welchen jedoch nur sechs verwirklicht werden können (vergleiche die Brücknersche Arbeit „Vielecke und Vielflache," S. 158).

---

§ 6. Reguläre Polyeder.

52. Allgemeine Bemerkungen. Schon Euklid war es bekannt, daß es fünf und nur fünf reguläre Polyeder gibt, nämlich Tetraeder, Hexaeder (Würfel), Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder. Und im platonischen Dialoge von Timäus von Lokri heißt es: „Das Feuer trete als Tetraeder auf, die Luft bestehe aus Oktaedern, das Wasser aus Ikosaedern und die Erde aus Würfeln, und da noch eine fünfte Gestaltung möglich war, so habe Gott diese, das Pentagondodekaeder, benutzt um als Umriß des Weltganzen zu dienen."

Wir übergehen hier wieder allgemein bekannte Sätze, z. B. daß die regulären Polyeder eine durch die Eckpunkte gehende *Umkugel*, eine die Kanten in ihren Mitten berührende *Ankugel* und eine die Seitenflächen in ihren Mittelpunkten berührende *Inkugel* zulassen und diese drei Kugeln den nämlichen Mittelpunkt haben. Ebenso, daß die polarreziproken Figuren von Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder in bezug auf die Ankugel der Reihe nach ein Tetraeder, Oktaeder, Hexaeder, Ikosaeder, Dodekaeder mit der nämlichen Kugel als Ankugel sind. Nur bringen wir behufs mehrdimensionaler Ausdehnung in Erinnerung (Fig. 42), wie der Durchmesser $2r_u$ der Umkugel beim Ikosaeder und Dodekaeder mittels der Beziehung $AP^2 = PM \cdot PQ$

gefunden wird, wo AM beim Ikosaeder der Umradius des von fünf Kanten gebildeten regulären Fünfecks $ABCDE$ und beim Dodekaeder der Umradius des von drei Fünfecksdiagonalen gebildeten gleichseitigen Dreiecks ABC ist; woraus

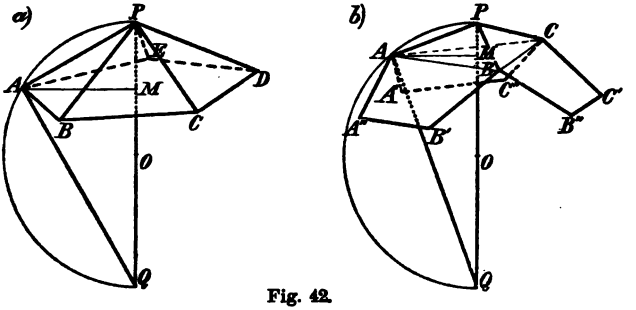


Fig. 42.

dann weiter die Radien r_a, r_i von An- und Inkugel abgeleitet werden mittels der Beziehungen

$$r_u^2 = r_i^2 + r_u'^2, \quad r_a^2 = r_i^2 + r_i'^2,$$

wo r_u', r_i' die Um- und Inradii der begrenzenden regulären Polygone bedeuten.

Folgende Tabelle enthält die Hilfsgröße PM und die Radien r_u, r_a, r_i der drei Kugeln ausgedrückt durch die Kante als Einheit, die Oberfläche O durch das Quadrat der Kante als Einheit, den Inhalt I durch die dritte Potenz der Kante als Einheit, sowie die Gradzahl des Kantenwinkels ω samt seinem Sinus.

	PM	r_u	r_a
Tetraeder . . .	$\frac{1}{3}\sqrt{6}$	$\frac{1}{4}\sqrt{6}$	$\frac{1}{4}\sqrt{2}$
Hexaeder . . .	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
Oktaeder . . .	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
Dodekaeder . .	$\frac{1}{6}(\sqrt{5}-1)\sqrt{3}$	$\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})\sqrt{3}$	$\frac{1}{4}(3+\sqrt{5})$
Ikosaeder . . .	$\frac{1}{10}\sqrt{10(5-\sqrt{5})}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$

53. Die Existenzbeweise für die regulären Polyeder. Wir unterscheiden mit Brückner vier verschiedene Beweise für die Existenz der regulären Vielflache; diese Beweise sollen hier in gedrängter Kürze vorgeführt werden.

a) *Der historische Existenzbeweis.* Die Summe der ebenen Winkel, d. h. der Seiten eines konvexen Vielkants ist kleiner als 360°. Hieraus ergibt sich, daß in einer Ecke eines regulären Vielflachs nur 3, 4 oder 5 gleichseitige Dreiecke, 3 Quadrate, oder 3 reguläre Fünfecke zusammenstoßen können. Also sind überhaupt nur fünf verschiedene Fälle möglich. Ist nun m wieder die Ecken- und Seitenzahl der regulären Polygone, von welch letzteren p durch jeden Eckpunkt gehen mögen, und bezeichnen e, k, f wie gewöhnlich die Zahlen der Ecken, Kanten und Flächen, so hat man offenbar

$$pe = mf = 2k, \tag{55}$$

aus welchen zwei Beziehungen die *Verhältnisse* der Zahlen e, k, f zueinander abzuleiten sind. Und nun gibt der Eulersche Satz unmittelbar die absolute Größe dieser Zahlen und zwar so, daß jedem der fünf möglichen Fälle wirklich eine einzige Lösung entspricht. So findet man die bekannten fünf Wertsysteme (m, p, e, k, f), wonach sich durch wirkliches Aneinanderfügen der regulären Vielecke die Existenz der fünf Vielflache ergibt.

Aufgabe 57. Ist die gewöhnliche Definition des regulären Vielflachs als „Polyeder begrenzt durch kongruente

r_i	O	I	ω	$\sin\omega$
$\frac{1}{12}\sqrt{6}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{12}\sqrt{2}$	70°31′43,6″	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$
$\frac{1}{2}$	6	1	90°	1
$\frac{1}{6}\sqrt{6}$	$2\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{2}$	109°28′16,4″	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$
$\frac{1}{20}\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}$	$3\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$\frac{1}{4}(15+7\sqrt{5})$	116°33′54,2″	$\frac{2}{5}\sqrt{5}$
$\frac{1}{12}(3+\sqrt{5})\sqrt{3}$	$5\sqrt{3}$	$\frac{5}{12}(3+\sqrt{5})$	138°11′22,6″	$\frac{2}{3}$

reguläre Polygone, von welchen in jeder Ecke die nämliche Anzahl zusammentreffen," unangreifbar?

[Man denke an ein durch scharnierartige Aneinanderfügung von kongruenten regulären Polygonen erzeugtes Modell.]

Aufgabe 58. Wie wäre die obige Definition *nötigenfalls* zu ergänzen?

[Durch Hinzufügung der Bedingung, daß die durch einen Eckpunkt gehenden Seitenflächen ein reguläres Vielkant einschließen sollen.]

b) *Die regulären Kugelnetze.* Ein reguläres Kugelnetz entsteht, wenn man die Kanten eines regulären Polyeders aus dem Mittelpunkte M der Umkugel auf die Oberfläche dieser Kugel projiziert; demnach ist die Aufgabe der Bestimmung der möglichen regulären Vielflache identisch mit derjenigen, welche in einer lückenlosen Überdeckung der Kugeloberfläche durch kongruente reguläre sphärische Polygone besteht. Dabei gelten dann wieder die Beziehungen (55) und ergibt sich die Eulersche Gleichung, wie wir dies schon früher [15c] nachgewiesen haben, aus der Betrachtung des sphärischen Inhalts der Polygone.

c) *Die Schlegelschen Diagramme.* Projiziert man die regulären Vielflache zentral auf eine Seitenfläche aus einem passend gewählten Punkte der Mittelpunktsnormale dieser Seitenfläche, so erhält man die bekannten Schlegelschen Diagramme, welche in Fig. 43 nach der wachsenden Anzahl der Seitenflächen vorgeführt sind.

Schon früher [9b] wurde hervorgehoben, wie es möglich ist mit Hilfe der planimetrischen Aufgabe der Zerlegung eines Vielecks auf die Existenz bestimmter Polyeder zu schließen. Gilt es jetzt insbesondere aus Diagrammen die möglichen regulären Polyeder abzuleiten, so abstrahiere man zunächst von aller metrischen Regelmäßigkeit und beschränke sich auf die Bestimmung der Gruppen von Vielflachen, welche mit eventuell existierenden regulären Polyedern isomorph sind. Dabei steht man dann dem allgemeinen Probleme der Ebene gegenüber ein gegebenes m-Eck in der Weise in m-Ecke zu zerlegen, daß in jedem neuen Eckpunkte p, in jedem Eckpunkte des gegebenen m-Ecks $p-1$

dieser m-Ecke zusammenstoßen. Und aus der Unmöglichkeit dieses Problem zu erledigen auf eine von den in Fig. 43 vorliegenden Lösungen verschiedene Weise kann geschlossen werden, daß es andere Gruppen regelmäßig gebauter Vielflache oder, wie wir kurz sagen wollen, andere *regelmäßige Vielflachsgruppen* nicht gibt. Ist dadurch gezeigt, daß es fünf und nur fünf regelmäßige Polyedergruppen gibt, so wird nachträglich leicht bewiesen, daß Schlegelsche Diagramme mit bestimmten Maßverhältnissen wirklich zentrale Projektionen regulärer Polyeder sind.

d) *Das rechtwinklige Koordinatensystem.* Es lassen sich die regulären Polyeder in bezug auf ein gegebenes recht-

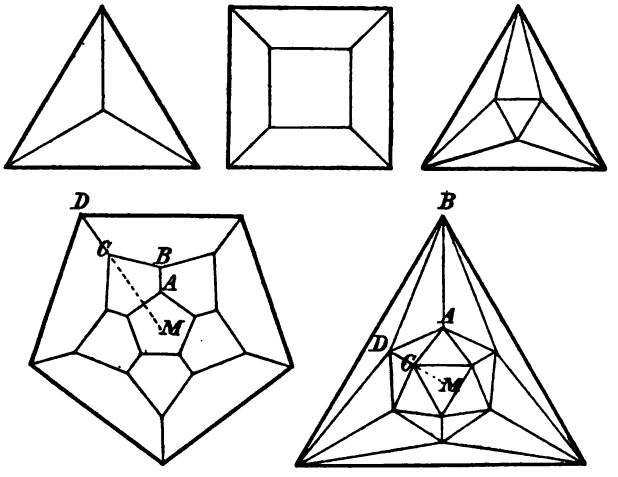


Fig. 43.

winkliges Koordinatensystem in eine solche Lage bringen, daß sich die Koordinaten und Gleichungen ihrer Ecken, Kanten und Flächen in übersichtlicher Anordnung darstellen. Behufs Ausdehnung auf Polytope muß dies hier näher entwickelt werden.

Wir fangen mit Tetraeder, Hexaeder und Oktaeder an. Trägt man auf die Achsen OX, OY, OZ eines rechtwinkligen Koordinatensystems vom Ursprunge O aus nach beiden

Seiten hin gleiche Segmente ab, so erhält man (Fig. 44) drei Punktepaare (A_x, A'_x), (A_y, A'_y), (A_z, A'_z), welche die Paare der Gegenecken eines Oktaeders sind. Bringt man durch diese Punkte Ebenen senkrecht zu den Achsen, auf denen sie liegen, so erhält man die sechs Seitenflächen eines Hexaeders. Teilt man die Eckpunkte B dieses Hexaeders in zwei Gruppen (B, B_x, B_y, B_z), (B', B'_x, B'_y, B'_z) von vier nicht durch Kanten verbundenen, oder nach einem schon früher [29] verwendeten Ausdrucke „nicht-benachbarten" Punkten ein, so findet man die Eckpunkte zweier kongruenter in das Hexaeder eingeschriebener Tetraeder, von welchen das erstere das linke, das letztere das rechte heißen mag. Nennt man zwei Seitenflächen des Oktaeders benachbart, wenn ihre Schnittlinie eine Kante des Oktaeders ist, so findet man die Seitenflächen der nämlichen Tetraeder, wenn man die acht Seitenflächen des Oktaeders in zwei Gruppen von vier nicht-benachbarten Flächen einteilt und die Flächen jedes Quadrupels für sich bis zur gegenseitigen Durchschneidung ausbreitet; also sind beide Tetraeder auch dem Oktaeder umgeschrieben zu nennen.

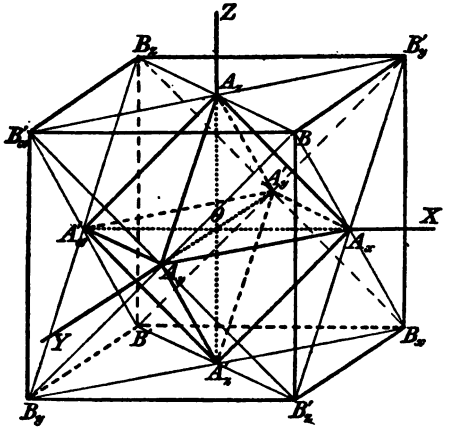


Fig. 44.

Setzt man voraus, daß die vom Ursprunge aus auf die Achsen abgetragenen Segmente die Längeneinheit bilden, und nimmt man neben den Punktkoordinaten x, y, z Ebenenkoordinaten ξ, η, ζ an, welche mittels der Beziehung $\xi x + \eta y + \zeta z + 1 = 0$ der vereinigten Lage ($I\,81_1$) mit den Punktkoordinaten zusammenhängen, so findet man für die Koordinaten der Eckpunkte und Seitenflächen der vier regulären Polyeder der Fig. 44 die in der folgenden Tabelle niedergelegten Werte,

	H	O			$L \cdot T$				$R \cdot T$				
x	± 1	± 1	0	0	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	ξ
y	± 1	0	± 1	0	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	η
z	± 1	0	0	± 1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	ζ
	O	H			$R \cdot T$				$L \cdot T$				

wobei die Überschrift sich auf die Punktkoordinaten, die Unterschrift sich auf die Ebenenkoordinaten bezieht, und alle Zeichenkombinationen zu nehmen sind.

Die Gleichungenpaare der Kanten sind in folgender Tabelle zusammengestellt,

H	O	$L \cdot T$	$R \cdot T$
$y=\pm 1,\ z=\pm 1$	$\pm y \pm z = 1,\ x=0$	$y \pm z = 0,\ x=\pm 1$	$y \pm z = 0,\ x=\mp 1$
$z=\pm 1,\ x=\pm 1$	$\pm z \pm x = 1,\ y=0$	$z \pm x = 0,\ y=\pm 1$	$z \pm x = 0,\ y=\mp 1$
$x=\pm 1,\ y=\pm 1$	$\pm x \pm y = 1,\ z=0$	$x \pm y = 0,\ z=\pm 1$	$x \pm y = 0,\ z=\mp 1$

wo beim Hexaeder und Oktaeder alle Zeichenkombinationen, bei den beiden Tetraedern aber nur die oberen Zeichen für sich oder die unteren für sich genommen werden sollen.

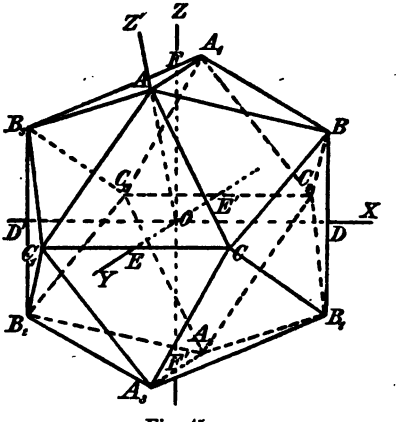


Fig. 45.

Zum Ikosaeder und Dodekaeder übergehend tragen wir (Fig. 45) von O aus auf die rechtwinkligen Achsen OX, OY, OZ nach beiden Seiten hin gleiche Segmente a und von den so auf den Achsen OZ, OX, OY erhaltenen Punkten aus, der Reihe nach in der Richtung der Achsen OY, OZ, OX, nach beiden Seiten hin gleiche Segmente b ab,

um nun zu zeigen, daß die zwölf nicht auf den Achsen liegenden Punkte (A, A_1, A_2, A_3), (B, B_1, B_2, B_3), (C, C_1, C_2, C_3), welche von O sämtlich die Entfernung $\sqrt{a^2+b^2}$ haben, bei richtiger Wahl des Verhältnisses von a zu b die Eckpunkte eines Ikosaeders bilden. Aus dem Schema

$$A \ldots (0, \pm b, \pm a),\ B \ldots (\pm a, 0, \pm b),\ C \ldots (\pm b, \pm a, 0)$$

der Koordinaten dieser Punkte ergibt sich, daß — unabhängig vom Verhältnisse von a zu b — schon acht der zwanzig begrenzenden Dreiecke gleichseitig, die übrigen zwölf gleichschenklig sind und das Polyeder ein Ikosaeder wird unter der Bedingung $AA' = AB$, d. h. für $4b^2 = a^2 + b^2 + (a-b)^2$, oder $b^2 + ab - a^2 = 0$, d. h. für $b = \frac{1}{2}a(-1+\sqrt{5})$; also muß b die Seite des regulären Zehnecks im Kreise mit dem Radius a sein. In der Kantenlänge als Einheit sind also die Koordinaten der Eckpunkte

$$\left.\begin{array}{lccc} A \ldots & 0 & , & \pm\frac{1}{2} \quad , \quad \pm\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}) \\ B \ldots & \pm\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}), & 0 & , \quad \pm\frac{1}{2} \\ C \ldots & \pm\frac{1}{2} \quad , & \pm\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}), & 0 \end{array}\right\}$$

und hieraus findet man leicht für die Gleichungen der

$$\left.\begin{array}{l} \text{acht Ebenen } ABC \ldots \pm x \pm y \pm z = \frac{1}{4}(3+\sqrt{5}) \\ \text{vier Ebenen } ACC \ldots \pm(\sqrt{5}-1)y \pm 2(\sqrt{5}-2)z = 1 \\ \text{vier Ebenen } BAA \ldots \pm(\sqrt{5}-1)z \pm 2(\sqrt{5}-2)x = 1 \\ \text{vier Ebenen } CBB \ldots \pm(\sqrt{5}-1)x \pm 2(\sqrt{5}-2)y = 1 \end{array}\right\}.$$

Mittels dieser letzten Betrachtung würde sogar ein Helmholtzsches Flachwesen von der Möglichkeit der Existenz des Ikosaeders zu überzeugen sein. Und wäre dieses Resultat erzielt, so würde eine räumliche Ausdehnung der Reziprozität der Ebene genügen für das Dodekaeder das nämliche zu erreichen. So transformiert die Orthogonalitätsverwandtschaft (198_4) mit O als Zentrum und der negativen Einheit als Potenz — vergleiche auch 52_3 — obiges Ikosaeder in ein Dodekaeder, dessen 20 Eckpunkte — vergleiche obige Gleichungen der 20 Seitenflächen des Ikosaeders — sich teilen in eine Gruppe von acht Punkten $[\pm(3-\sqrt{5}), \pm(3-\sqrt{5}), \pm(3-\sqrt{5})]$ und drei Gruppen von vier Punkten $[0, \pm(\sqrt{5}-1),$

$\pm 2(\sqrt{5}-2)]$, $[\pm 2(\sqrt{5}-2), 0, \pm(\sqrt{5}-1)]$, $[\pm(\sqrt{5}-1), \pm 2(\sqrt{5}-2), 0]$ und dessen 12 Seitenflächen — vergleiche die Koordinaten der 12 Eckpunkte des Ikosaeders — sich teilen in drei Gruppen von vier Seitenflächen $\pm\frac{1}{2}y \pm \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})z = 1$, $\pm\frac{1}{2}z \pm \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})x = 1$, $\pm\frac{1}{2}x \pm \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})y = 1$. Allein dieses Dodekaeder würde Kanten von der Länge

$$\sqrt{[(3-\sqrt{5})-0]^2+[(3-\sqrt{5})-(\sqrt{5}-1)]^2+[(3-\sqrt{5})-2(\sqrt{5}-2)]^2} = 4(\sqrt{5}-2)$$

besitzen. Also gibt eine Reduktion aller Dimensionen mittels Division durch $4(\sqrt{5}-2)$ für das Dodekaeder mit der Einheit als Kantenlänge

acht Punkte ...	$\pm\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$,	$\pm\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$,	$\pm\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$
vier Punkte ...	0 ,	$\pm\frac{1}{4}(3+\sqrt{5})$,	$\pm\frac{1}{2}$
vier Punkte ...	$\pm\frac{1}{2}$,	0 ,	$\pm\frac{1}{4}(3+\sqrt{5})$
vier Punkte ...	$\pm\frac{1}{4}(3+\sqrt{5})$,	$\pm\frac{1}{2}$,	0

und

vier Seitenflächen	$\pm 2(\sqrt{5}-2)y \pm (3-\sqrt{5})z = 1$
vier Seitenflächen	$\pm 2(\sqrt{5}-2)z \pm (3-\sqrt{5})x = 1$
vier Seitenflächen	$\pm 2(\sqrt{5}-2)x \pm (3-\sqrt{5})y = 1$

Man bringt obiges Dodekaeder in der hier angegebenen Lage zur Darstellung (Fig. 46), indem man, alle Koordinaten mit $\sqrt{5}-1$ multiplizierend, mit einem Hexaeder mit der Kantenlänge 2 anfängt und nun die drei Punktquadrupel (A, A_1, A_2, A_3), (B, B_1, B_2, B_3), (C, C_1, C_2, C_3) konstruiert mittels der Bemerkung, daß AA_1 das größere Stück der nach

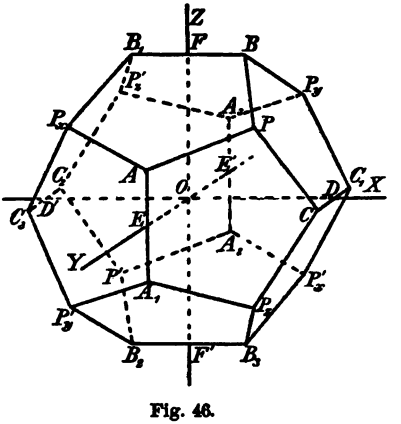


Fig. 46.

dem goldenen Schnitte geteilten Hexaederkante, diese Kante selbst das größere Stück des Abstandes FF' der neuen Kanten AA_1, A_2A_3 ist, usw.

Die Figuren 45 und 46 führen uns mit Hinsicht auf den Bau des Ikosaeders und Dodekaeders zu einigen Bemerkungen, welche uns später nützlich sein werden. Es sind zunächst einerseits die acht Seitenflächen ABC (Fig. 45) die Seitenflächen eines Oktaeders, andererseits die acht Eckpunkte P (Fig. 46) die Eckpunkte eines Hexaeders; das erstere leuchtet unmittelbar ein bei Vergleichung der Gleichungen, das letztere — die dualistische Umkehrung des ersteren — ist oben bei der Konstruktion der Fig. 46 schon angegeben worden. Nun sind aber alle Eckpunkte eines regulären Polyeders gleichwertig; deshalb gelten die Sätze:

„Jeder Eckpunkt des Dodekaeders ist Eckpunkt zweier Hexaeder und zweier Tetraeder, deren Eckpunkte sämtlich Eckpunkte des Dodekaeders sind."

„Die Eckpunkte des Dodekaeders bilden zweimal genommen die Eckpunkte von fünf Hexaedern und zehn Tetraedern; diese zehn Tetraeder sind derweise in zwei Gruppen zu verteilen, daß jede von beiden Gruppen an sich zu ihrer Bildung alle Eckpunkte des Dodekaeders braucht."

Weil es beim Ikosaeder und beim Dodekaeder drei Paare paralleler Kanten gibt, für welche die Verbindungslinien der Mitten ein rechtwinkliges Achsenkreuz bilden, und die Kanten dieser Polyeder unter sich gleichwertig sind, so findet man schließlich noch den Satz:

„Die fünfzehn Verbindungslinien der Mitten paralleler Kanten beim Ikosaeder und Dodekaeder lassen sich in fünf rechtwinklige Achsenkreuze zerlegen."

So erhält man die beiden zu irgend einer Kantenmitte D gehörigen Kantenmitten E, F (Fig. 45 und 46), indem man die Wege DCE, DBF zurücklegt, welche in übersichtlicher und leicht zu formulierender Weise aus einer halben Kante und einer Symmetrieachse einer Seitenfläche bestehen.

54. Projektionen und Schnitte der regulären Polyeder. Abgesehen von Verschiebungen parallel zu sich selbst wird ein

reguläres Polyeder aus seiner oben gegebenen „Koordinatenstellung“ in eine willkürliche Lage in bezug auf das rechtwinklige Koordinatensystem gebracht mittels einer Drehung δ um eine willkürliche Achse, welche sich immer in drei Drehungen α, β, γ um die Koordinatenachsen zerlegen läßt. Und diese Drehungen können mit Hilfe der darstellenden Geometrie leicht ausgeführt werden.

Sind wir hiermit mit einem Schlage mit der *allgemeinsten* Projektion der regulären Polyeder fertig, so muß jetzt noch gezeigt werden, welche Eigentümlichkeiten sich bei *besonderer* Lage in den Projektionen offenbaren können. Zu diesem Zwecke unterscheiden wir unter den durch den Mittelpunkt O eines regulären Polyeders gehenden Geraden im allgemeinen drei Arten von „Hauptstrahlen“, nämlich die Verbindungslinien OE_0, OK_0, OF_0 vom Mittelpunkte mit einer Ecke E_0, einer Kantenmitte K_0, einem Flächenmittelpunkte F_0, was uns erlaubt die senkrechten Parallelprojektionen in der Richtung der Hauptstrahlen „Hauptprojektionen“, die Schnitte mit Ebenen durch O senkrecht zu den Hauptstrahlen „Hauptschnitte“ zu nennen. In gedrängter Kürze führen wir die verschiedenen Hauptprojektionen und Hauptschnitte der regulären Polyeder vor; wir sehen uns sogar genötigt bei der Erwähnung dieser Schnitte auch die Schnitte mit parallelen Ebenen zu behandeln. Behufs mehrdimensionaler Verallgemeinerung, für welche die Betrachtung der parallelen Schnitte eine Vorübung bildet, stellen wir uns dabei auf den Standpunkt eines Helmholtzschen Flachwesens, welches, weil ihm die räumliche Anschauung fehlt, sich mit Hilfe von parallelen Schnitten eines Körpers ein räumliches Bild dieses Körpers entwerfen muß, gerade so wie der Naturhistoriker sich durch Aufstapelung der im Paraffinbande enthaltenen Mikrotomquerschnitte eines Gewebes oder der Dünnschliffe eines Minerals über den körperlichen Bau dieser Gebilde erkundigt, — welcher Prozeß vielleicht mittels des Kinematographen zu vereinfachen wäre. Dabei setzen wir dann voraus, daß die schneidende Ebene, die Ebene des Flachwesens, ihre Lage beibehält, das reguläre Polyeder hingegen sich derart bewegt, daß alle Punkte zu dieser Ebene senkrechte Geraden durchlaufen; außerdem denken wir uns die Ebene, welche der Körper durchsetzt, horizontal und bezeichnen mit dem Symbole $(a, b, c, \ldots)$ unter Beifügung

des Wortes „Schichtung", wieviel Ecken jedesmal zu gleicher Zeit diese Ebene passieren.

a) *Tetraeder.* Das Tetraeder hat die besondere Eigenschaft nur zwei verschiedene Gattungen von Hauptstrahlen zu besitzen, weil ein Hauptstrahl OE_0 zu gleicher Zeit ein Hauptstrahl OF_0 ist. In den Richtungen $OE_0 = OF_0$ und OK_0 projizieren sich die Ecken des Tetraeders (Fig. 47[a]) als Mittelpunkt 1 und Ecken 2, 3, 4 eines gleichseitigen Dreiecks und (Fig. 47[b]) als die Ecken 1, 3, 2, 4 eines Quadrats. Und die entsprechenden Reihen von parallelen Schnitten oder, wie wir kurz sagen wollen, die entsprechenden „Transformationsbilder" des Tetraeders bestehen aus einem gleichseitigen Dreiecke und einem Rechtecke, welche sich fortwährend umbilden.

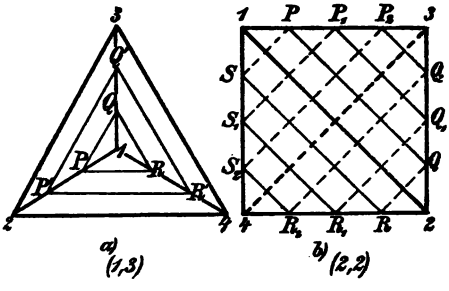


Fig. 47.

Das gleichseitige Dreieck PQR fängt als ein Punkt 1 an, dehnt sich um 1 herum regelmäßig bis zur Größe (2, 3, 4) aus, um dann plötzlich zu verschwinden; das Rechteck behält seinen Mittelpunkt, die Richtungen und die Summe seiner Seiten unverändert bei, bleibt fortwährend dem Quadrate (1, 3, 2, 4) einbeschrieben und durchläuft die Stadien (1, 2) doppelt gezählt, $PQRS$, $P_1Q_1R_1S_1$, $P_2Q_2R_2S_2$, (3, 4) doppelt gezählt. Das gleichseitige Dreieck $P_1Q_1R_1$ mit einer Seite $P_1Q_1 = \frac{1}{4}(2, 3)$ und das Quadrat $P_1Q_1R_1S_1$ bilden die Hauptschnitte. Und die Schichtungen sind (1, 3) — oder (3, 1) — und (2, 2)

b) *Hexaeder.* Bei den vom Tetraeder verschiedenen regulären Polyedern gibt es allemal drei wirklich verschiedene Gattungen von Hauptstrahlen, die Diagonalen und die Querlinien erster und zweiter Art; wir bezeichnen sie immerfort der Reihe nach als Hauptstrahlen OE_0, OK_0, OF_0.

In den Richtungen OE_0, OK_0, OF_0 projizieren sich die acht Ecken 1, 2, ..., 8 des Hexaeders (Fig. 48[a]) als die

Ecken und der doppelt gezählte Mittelpunkt eines regulären Sechsecks, (Fig. 48b) als die Ecken und doppelt gezählten Mitten der längeren Seiten eines Rechtecks mit dem Seitenverhältnis $\sqrt{2}$ und (Fig. 48c) als die doppelt gezählten Ecken eines Quadrats; in der nämlichen Reihenfolge bilden das reguläre Sechseck $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ der Kantenmitten der ersten, das begrenzende Rechteck der zweiten und das Quadrat der dritten Hauptprojektion die Hauptschnitte. Und von den entsprechenden Transformationsbildern durchläuft das erste drei verschiedene Figurengruppen,

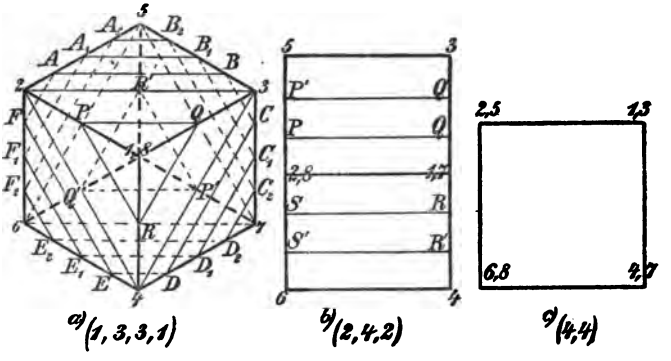


Fig. 48.

zunächst vom Punkte 1 bis zum Dreiecke (2, 3, 4) eine Reihe von gleichseitigen Dreiecken PQR, sodann vom Dreiecke (2, 3, 4) bis zum Dreiecke (7, 6, 5) eine Reihe $ABCDEF$, $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ von der Hauptprojektion einbeschriebenen gleicheckigen Sechsecken von unveränderlichem Umfang, endlich vom Dreiecke (7, 6, 5) bis zum Punkte 8 wieder eine Reihe gleichseitiger Dreiecke $P'Q'R'$ mit entgegengesetzter Orientierung. Weiter besteht die Reihe des zweiten Transformationsbildes aus Rechtecken $PQRS$, $P'Q'R'S'$ mit gemeinschaftlicher Mitte zweier Gegenseiten, und ist und bleibt das dritte ein Quadrat, usw. Schichtungen (1, 3, 3, 1), (2, 4, 2), (4, 4).

Aufgabe 59. Wie beweist man, daß der erste Hauptschnitt des Hexaeders ein reguläres Hexagon ist?

c) *Oktaeder.* In den Richtungen OE_0, OK_0, OF_0 projizieren sich die sechs Ecken 1, 2, ..., 6 des Oktaeders (Fig. 49[a]) als die Ecken und der doppelt gezählte Mittelpunkt eines Quadrats, (Fig. 49[b]) als die spitzen Ecken und die doppelt gezählten stumpfen Ecken eines Rhombus mit dem Diagonalenverhältnis $\sqrt{2}$ und (Fig. 49[c]) als die Ecken eines regulären Sechsecks; in der nämlichen Reihenfolge bilden die Begrenzungen Quadrat und Rhombus, und das reguläre Sechseck $A_1\ B_1\ C_1\ D_1\ E_1\ F_1$ der Kantenmitten die

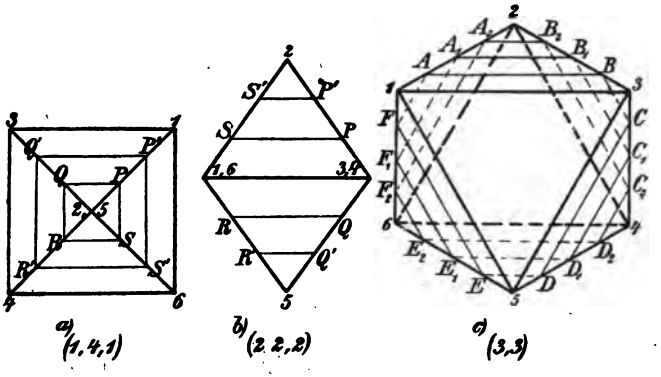


Fig. 49.

Hauptschnitte. Die Transformationsbilder sind ein sich von einem Punkte zu einem Quadrate (1, 3, 4, 6) vergrößerndes und von diesem Quadrate zu diesem Punkte verkleinerndes Quadrat $PQRS$, ein sich von einer Gerade zu einem Rhombus vergrößerndes und von diesem zu derselben Gerade verkleinerndes Sechseck $[P(3,4)\,QR\,(1,6)\,S]$ mit zwei Symmetrieachsen, ein sich vom Dreiecke (1, 3, 5) zum Dreiecke (4, 6, 2) umbildendes dem Hauptschnitte einbeschriebenes gleicheckiges Sechseck $ABCDEF$ von unveränderlichem Umfang. Schichtungen (1, 4, 1), (2, 2, 2), (3, 3).

Aufgabe 60. Wie beweist man, daß die dritte Hauptprojektion des Oktaeders ein reguläres Sechseck ist?

d) *Dodekaeder.* In der angenommenen Reihenfolge der Hauptstrahlen begrenzt sich die Projektion des Dodekaeders

(Fig. 50ª) als ein gleicheckiges Zwölfeck, (Fig. 50ᵇ) als ein Sechseck mir zwei Symmetrieachsen gleicher Länge und (Fig. 50ᶜ) als ein reguläres Zehneck; um nicht zu weitläufig zu werden, verweisen wir für nähere Lagenverhältnisse der Projektionen der Eckpunkte auf und innerhalb der Projektionsgrenze auf die Figuren, was um so eher geschehen kann, als die einander entsprechenden Ecken dieser Figuren wieder mit den

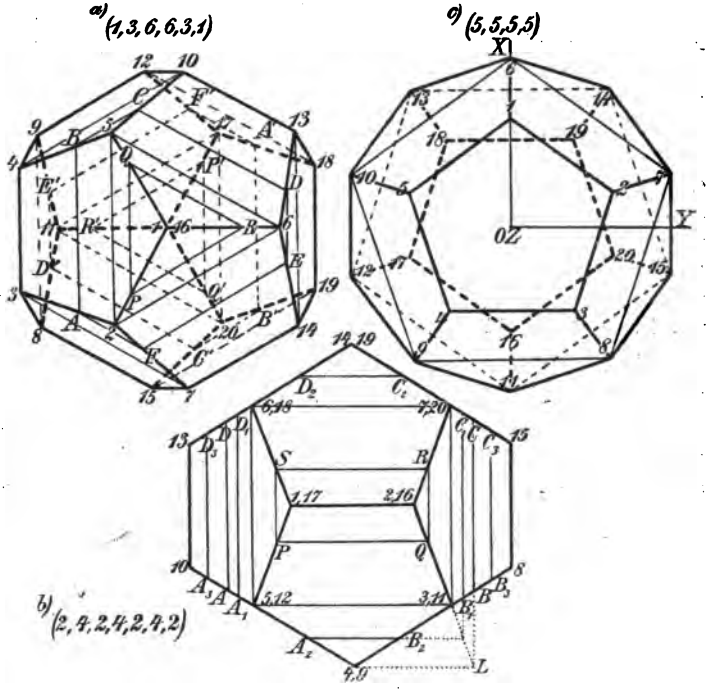


Fig. 50.

nämlichen Ziffern belegt sind. Die Hauptschnitte sind ein der Begrenzung einbeschriebenes Sechseck mit den Mitten der kleineren Seiten des gleicheckigen Zwölfecks als Ecken, das begrenzende Sechseck, das reguläre der Begrenzung eingeschriebene Zehneck der Kantenmitten. Und das erste Transformationsbild durchläuft drei, das zweite fünf und das dritte wieder drei Figurenreihen. Es bestehen nämlich: die

ersten Schnitte vom Punkte 1 zum Dreiecke (2, 5, 6) aus gleichseitigen Dreiecken PQR, vom Dreiecke (2, 5, 6) zum Dreiecke (17, 20, 11) aus gleicheckigen Sechsecken $ABCDEF$, und $A'B'C'D'E'F'$, vom Dreiecke (17, 20, 11) zum Punkte 16 — 1 aus gleichseitigen Dreiecken $P'Q'R'$; ebenso die zweiten Schnitte vom Geradensegmente (1, 2) zum Rechtecke (5, 3, 7, 6) aus Rechtecken $PQRS$, vom Rechtecke (5, 3, 7, 6) zum Sechsecke $[A(4, 9)\ BC(14, 19)\ D]$ — siehe die Konstruktion des Punktes L auf der Seite BC — aus Achtecken $A_1A_2B_2B_1C_1C_2D_2D_1$, vom nachgewiesenen Sechsecke zu diesem zurück aus Sechsecken $[A_3(4, 9)\ B_3\ C_3(14, 19)\ D_3]$ mit zwei Symmetrieachsen und nachher wieder zum Rechtecke (12, 11, 20, 18) = (5, 3, 7, 6) aus Achtecken, zum Geradensegmente (17, 16) = (1, 2) aus Rechtecken; endlich die dritten Schnitte von (1, 2, 3, 4, 5) zu (6, 7, 8, 9, 10) aus regulären Fünfecken, von (6, 7, 8, 9, 10) zu (11, 12, 13, 14, 15) aus gleicheckigen konzentrischen Zehnecken von konstantem Umfang, von (11, 12, 13, 14, 15) zu (16, 17, 18, 19, 20) aus regulären Fünfecken. Schichtungen (1, 3, 6, 6, 3, 1), (2, 4, 2, 4, 2, 4, 2), (5, 5, 5, 5).

Aufgabe 61. Beweise, daß in der letzten Projektion die vier Punkte 10, 18, 1, 14 in einer Gerade liegen.

Behufs späterer Anwendung sei noch bemerkt, daß bei der senkrechten Projektion des Dodekaeders auf die Hauptstrahlen OE_0, OK_0, OF_0 auf diesen Geraden der Reihe

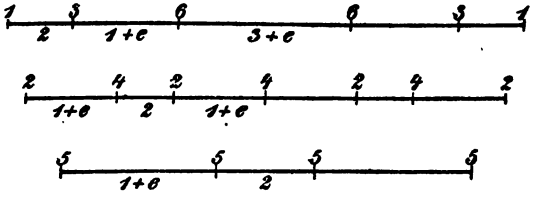


Fig. 51.

nach 6, 7, 4 Punkte markiert werden, deren Abstandsverhältnisse mit der Abkürzung $\sqrt{5} = e$ in Fig. 51 angegeben sind.

Aufgabe 62. Zeige, daß das Dodekaeder die Schich-
ungen

(2, 2, 1, 2, 3, 3, 2, 1, 2, 2), (2, 2, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 2, 2), (1, 2, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 1), (1, 2, 2, 1, 2, 4, 2, 1, 2, 2, 1) aufweist, wenn man die ebene Projektion der Fig. 50[b] in die Richtungen der Geraden (1, 8), (3, 10), (4, 15), (5, 20) projiziert.

e) *Ikosaeder.* Die Projektionsgrenzen des Ikosaeders sind (Fig. 52[a]) reguläres Zehneck, (Fig. 52[b]) Sechseck mit zwei Symmetrieachsen gleicher Länge, (Fig. 52[c]) reguläres Sechseck.

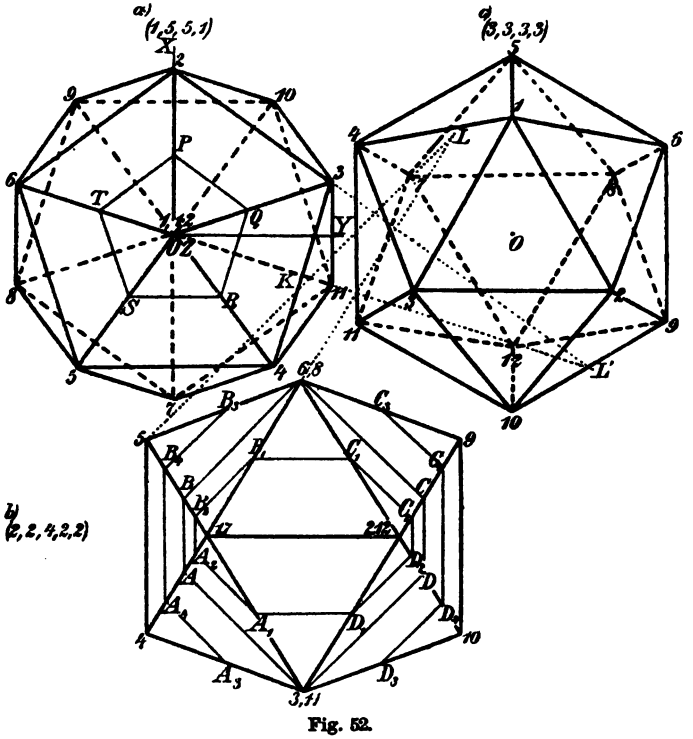


Fig. 52.

Die Hauptschnitte sind das reguläre Zehneck der Kantenmitten der Begrenzung, das Begrenzungssechseck, das reguläre Sechseck der Kantenmitten der Begrenzung. Jedes der drei Transformationsbilder durchläuft drei Figurenreihen.

Es bestehen nämlich: die ersten Schnitte vom Punkte 1 zu (2, 3, 4, 5, 6) aus regulären Pentagonen $PQRST$, von (2, 3, 4, 5, 6) zu (7, 8, 9, 10, 11) aus gleicheckigen Zehnecken, von (7, 8, 9, 10, 11) zum Punkte $12 = 1$ aus regulären Pentagonen; ebenso die zweiten Schnitte vom Geradensegmente (1, 2) zum Sechseck $[AB\,(6, 8)\,CD\,(3, 11)]$ — siehe die Konstruktion des Punktes B, wo 8 die Mitte von $4L$ ist und $B6$ zu $5L$ parallel läuft — aus Achtecken $A_1A_2B_2B_1C_1C_2D_2D_1$, vom angewiesenen Sechsecke zu diesem zurück aus Zehnecken $[A_3A_4B_4B_3\,(6, 8)\,C_3C_4D_4D_3\,(3, 11)]$ mit zwei Symmetrieachsen, vom angewiesenen Sechsecke zum Geradensegmente $(7, 12) = (1, 2)$ aus Achtecken; endlich die dritten Schnitte von (1, 2, 3) zu (5, 9, 11) aus Neunecken mit drei Symmetrieachsen, von (5, 9, 11) zu (10, 4, 6) aus gleicheckigen Sechsecken, von (10, 4, 6) zu (12, 7, 8) aus Neunecken mit drei Symmetrieachsen. Schichtungen (1, 5, 5, 1), (2, 2, 4, 2, 2), (3, 3, 3, 3).

Aufgabe 63. Beweise die Richtigkeit der Konstruktion des Punktes B in Fig. 52^b.

[Es ist Fig. 52^a das Dreieck $(6, 3, L')$ gleichschenklig; denn es sind die Winkel in 6 und L' beide 18°. Also ist K der Mittelpunkt von $6L'$, usw.]

Aufgabe 64. Berechne (Fig. 50^c, Fig. 52^c) das Verhältnis $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ der Radien der konzentrischen Kreise (in Fig. 50^c durch zehn, in Fig. 52^c durch sechs der Eckpunkte) und (Fig. 50^a) das Verhältnis $\frac{1}{6}(\sqrt{5}-1)\sqrt{3}$ der Seiten (8, 3) und (3, 4) des Umrisses.

55. Diagonalen und Winkelbeziehungen zwischen Hauptstrahlen bei den regulären Polyedern. In bezug auf beide Gegenstände teilen wir die regulären Polyeder wieder in zwei Gruppen, eine Gruppe mit einfacheren und eine Gruppe mit komplizierteren Verhältnissen.

a) *Tetraeder*, *Hexaeder* und *Oktaeder*. Als Simplex hat das Tetraeder gar keine Diagonalen. Und während, bei der Einheit von Kantenlänge, das Hexaeder zwölf Flächendiagonalen von der Länge $\sqrt{2}$ und vier sich hälftende Körperdiagonalen von der Länge $\sqrt{3}$ besitzt, hat das Okta-

eder nur drei sich senkrecht hälftende Körperdiagonalen von der Länge $\sqrt{2}$ aufzuweisen. . . . . .

Mittels der bekannten Beziehung zwischen dem Cosinus des Winkels, unter welchem die Entfernung zweier Punkte mit gegebenen rechtwinkligen Koordinaten vom Ursprunge aus gesehen wird, und eben diesen Koordinaten, oder mittels Anwendung der Cosinusformel in einfachen Dreiecken findet man — vergleiche die Koordinaten der acht Eckpunkte des Würfels in der Hauptstellung von Fig. 48[a] — leicht die Resultate der folgenden kleinen Tabelle, wo die Symbole $[1, 2]$, $[1(1, 2)]$, $[1(1, 2, 5, 3)]$, usw. in übersichtlicher Weise die Winkel angeben, welche vom Hauptstrahle OE_0 durch die Ecke 1 der Reihe nach mit dem Hauptstrahle OE_0 durch die Ecke 2, dem Hauptstrahle OK_0 durch die Kantenmitte $(1, 2)$, dem Hauptstrahle OF_0 durch den Flächenmittelpunkt $(1, 2, 5, 3)$, usw. gebildet werden.

ω	$\cos\omega$	ω	$\cos\omega$	ω	$\cos\omega$
$[1,2]$	$\frac{1}{3}$	$[1(2,5)]$	0	$[(1,2)(3,7)]$	$-\frac{1}{2}$
$[1(1,2])$	$\frac{1}{3}\sqrt{6}$	$[1(7,8)]$	$-\frac{1}{3}\sqrt{6}$	$[(1,2)(1,2,5,3)]$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$[1(1,2,5,3)]$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$[(1,2)(1,3)]$	$\frac{1}{4}$	$[(1,2)(4,6,8,7])$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$[1(4,6,8,7)]$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$[(1,2)(3,5)]$	0	$[(1,2)(1,3,4,7])$	0

Diese Tabelle für das Hexaeder gilt auch für das Oktaeder, wenn man die Hauptstrahlen OE_0 und OF_0 miteinander vertauscht und die Symbole entsprechend modifiziert. Und von den zwölf Fällen gelten diejenigen, bei welchen kein Hauptstrahl OK_0 auftritt, selbstverständlich auch für das Tetraeder.

b) *Dodekaeder und Ikosaeder.* Beim Dodekaeder (Fig. 50[a]) gibt es drei und beim Ikosaeder (Fig. 52[a]) zwei verschiedene Spezies von Diagonalen zweiter Gattung. Die Anzahlen werden in folgender Tabelle angegeben.

Dodekaeder		*Ikosaeder*	
Kanten	30	Kanten	30
Flächendiagonalen	$12\times5 = 60$	Körperdiagonalen: Spezies (1, 9)	$\frac{5\times12}{2} = 30$
Körperdiagonalen: Spezies (1, 8)	$\frac{6\times20}{2} = 60$	Körperdiagonalen: „ (1, 12)	$\frac{1\times12}{2} = 6$
Körperdiagonalen: „ (1, 11)	$\frac{3\times20}{2} = 30$		
Körperdiagonalen: „ (1, 16)	$\frac{1\times20}{2} = 10$	Verbindungsgeraden	$\frac{12\times11}{2} = 66$
Verbindungsgeraden	$\frac{20\times19}{2} = 190$		

Aufgabe 64. Berechne in der Kantenlänge als Einheit die Längen der nicht durch den Mittelpunkt gehenden Diagonalen $(1, 11) = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$, $(1, 8) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\sqrt{2}$ von Fig. 50 und $(1, 9) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ von Fig. 52.

Wir führen die vorgenommenen Winkelbestimmungen am Ikosaeder aus, weil die Berechnungen sich bei diesem von Dreiecken begrenzten Körper etwas einfacher gestalten. Dabei sind dann folgende allgemeine Bemerkungen vorauszuschicken.

Gilt es die Winkel zu bestimmen, welche die Hauptstrahlen OE_0 miteinander bilden, so denken wir uns einen dieser Hauptstrahlen zur Achse OZ gewählt (Fig. 52[a]) und leiten sodann aus der oben erhaltenen Schichtung (1, 5, 5, 1) ab, daß außer den Cosinuswerten ± 1, welche den auf der Achse OZ liegenden Eckpunkten entsprechen, nur noch zwei Cosinuswerte gesucht werden müssen und diese nur im Zeichen voneinander verschieden sind. Mit Hilfe der entsprechenden Schichtung (5, 5, 10, 5, 5) der Kantenmitten ergibt sich dann weiter, daß bei den Winkeln E_0OK_0, welche der bestimmte Hauptstrahl OE_0 mit den dreißig Hauptstrahlen OK_0 bildet, fünf Cosinuswerte auftreten und von diesen der mittlere verschwindet, die anderen paarweise den nämlichen absoluten Betrag haben. Und ebenso lehrt die entsprechende Schichtung (5, 5, 5, 5) der Flächenmittelpunkte, daß bei den Winkeln E_0OF_0 zwei Paare nur im Zeichen verschiedener Cosinuswerte vorkommen. Läßt man die Werte ± 1 und 0 einen Augenblick unberücksichtigt, so findet man, daß in derselben Weise zunächst jede der beiden

Schichtungen (1, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 1) und (2, 4, 2, 4, 2, 4, 2) von Kantenmitten und Flächenmittelpunkten in bezug auf einen Hauptstrahl OK_0 (Fig. 52[b]) zu drei, die Schichtung (1, 3, 6, 6, 3, 1) der Flächenmittelpunkte in bezug auf einen Hauptstrahl OF_0 (Fig. 52[c]) endlich zu zwei Paaren solcher Cosinuswerte führt. Sämtliche Resultate der Berechnung sind enthalten in folgender Tabelle,

	OE_0	OK_0	OF_0
OE_0	$\pm 1,\ \pm\frac{1}{5}\sqrt{5}$ $2\cdot 1+2\cdot 5$ $=12$	$\pm\frac{1}{10}\sqrt{10(5\pm\sqrt{5})},\ 0$ $4\cdot 5+10=30$	$\pm\frac{1}{15}\sqrt{15(5\pm 2\sqrt{5})}$ $4\cdot 5=20$
OK_0		$\pm 1,\ \pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}\pm 1),$ $\pm\frac{1}{2},\ 0$ $2\cdot 1+4\cdot 4$ $+2\cdot 4+4=30$	$\pm\frac{1}{8}(\sqrt{5}\pm 1),$ $\pm\frac{1}{8}\sqrt{3},\ 0$ $4\cdot 2+2\cdot 4+4=20$
OF_0			$\pm 1,\ \pm\frac{1}{3}\sqrt{5},\ \pm\frac{1}{3}$ $2\cdot 1+2\cdot 3+2\cdot 6$ $=20$

wo oben die 12 OE_0, die 30 OK_0, die 20 OF_0 und links die jedesmal mit der Achse OZ zusammenfallenden Hauptstrahlen stehen.

56. Koordinaten der Eckpunkte von Dodekaeder und Ikosaeder in anderer Stellung. Die Formeln, welche den Übergang von irgend einem rechtwinkligen Koordinatensysteme zu einem andern mit dem nämlichen Ursprung vermitteln, sind früher (I 72) abgeleitet worden. Wir wenden sie jetzt auf die oben (53) gefundenen Koordinaten von Dodekaeder und Ikosaeder an, indem wir für jeden dieser beiden Körper ein System von Koordinaten bestimmen, welches fast ebenso einfach ist wie das schon erhaltene und sich später nützlich zeigen wird.

Dreht man (Fig. 45) die Achsen OY, OZ in ihrer

Ebene in der Weise um O, daß die neue Achse OZ' den Ikosaedereckpunkt A enthält, so entspricht dieser Drehung das Formelsystem

$$x' = x, \quad y'\sqrt{10+2\sqrt{5}} = y(1+\sqrt{5}) - 2z,$$
$$z'\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 2y + (1+\sqrt{5})z.$$

Allein anstatt die neuen Koordinaten (x', y', z') der Ikosaedereckpunkte durch Einführung der für (x, y, z) erhaltenen Werte zu berechnen, ziehen wir es vor, sie unmittelbar aus der Figur abzulesen, was keine Schwierigkeit bietet, weil bebekannt ist, daß die Hauptstrahlen $O2$, $O3$, $O4$, $O5$, $O6$ (Fig. 52[a]) mit der Achse OZ' einen spitzen Winkel bilden, dessen Cosinus $\frac{1}{5}\sqrt{5}$ ist. So findet man in der Länge des Umradius als Einheit

Ecken	x	y	z	
1	0	0	1	
2, 3, 4, 5, 6	$\frac{2}{5}\sqrt{5}\cos\psi$	$\frac{2}{5}\sqrt{5}\sin\psi$	$\frac{1}{5}\sqrt{5}$	$(\psi = \frac{2}{5}k\pi,$
7, 8, 9, 10, 11	$-\frac{2}{5}\sqrt{5}\cos\psi$	$-\frac{2}{5}\sqrt{5}\sin\psi$	$-\frac{1}{5}\sqrt{5}$	$k = 0, 1, 2, 3, 4)$
12	0	0	-1	

Und diese Tabelle gestaltet sich noch ein wenig einfacher bei Einführung von Polarkoordinaten (ϱ, φ, ψ) mittels der Formel

$$z = \varrho\cos\varphi, \quad x = \varrho\sin\varphi\cos\psi, \quad y = \varrho\sin\varphi\sin\psi,$$

wo ψ also die ursprüngliche Bedeutung behalten hat; denn, weil $\varrho = 1$ ist, findet man für $\cos\alpha = \frac{1}{5}\sqrt{5}$

Ecken	φ	ψ	
1	0		
2, 3, 4, 5, 6	α	$\frac{2k}{5}\pi$	$(k = 0, 1, 2, 3, 4)$
7, 8, 9, 10, 11	$\pi - \alpha$	$\left(\frac{2k}{5}+1\right)\pi$	
12	π		

Ebenso führt der Wert $\pm\frac{1}{15}\sqrt{15(5\pm 2\sqrt{5})}$ des Cosinus des Winkels zwischen der Achse OZ' (Fig. 50^c) und den Hauptstrahlen OE_0 des Dodekaeders zur Tabelle

Ecken	φ	ψ
1, 2, 3, 4, 5	β	$\frac{2k}{5}\pi$
6, 7, 8, 9, 10	γ	$\frac{2k}{5}\pi$
11, 12, 13, 14, 15	$\pi-\gamma$	$\left(\frac{2k}{5}+1\right)\pi$
16, 17, 18, 19, 20	$\pi-\beta$	$\left(\frac{2k}{5}+1\right)\pi$

$(k = 0, 1, 2, 3, 4)$

wo $\operatorname{tg}\beta = 3-\sqrt{5}$ und $\operatorname{tg}\gamma = 3+\sqrt{5}$ zu nehmen ist.

57. Die Sternpolyeder. Außer den fünf konvexen regulären Polyedern gibt es noch vier nicht-konvexe Sternpolyeder, welche in der Art von kongruenten regulären Polygonen — oder Sternpolygonen — begrenzt werden, daß in allen Ecken kongruente reguläre Vielkante entstehen. Diesem regelmäßigen Baue zufolge läßt jedes Sternpolyeder eine Um-, eine An-, eine Inkugel zu und haben diese Kugeln den nämlichen Mittelpunkt; außerdem sind die Ecken zu gleicher Zeit die Eckpunkte eines konvexen regulären Vielflachs und ebenso die Flächen zu gleicher Zeit die Seitenflächen eines andern konvexen regulären Vielflachs, welche Vielflache der Reihe nach „einhüllendes Polyeder“ und „Kernpolyeder“ genannt werden.

Die teilweise schon von Kepler aber hauptsächlich von Poinsot gefundenen Sternpolyeder werden wie die Sternpolygone als Bildungen höherer Art betrachtet; dabei gibt die „Artzahl“ an, wie oft die Umkugel überdeckt wird durch das sphärische Netz des Polyeders, welches erhalten wird, wenn man die Seitenflächen aus dem Mittelpunkte auf die Umkugeloberfläche projiziert. Ist nun M der Mittelpunkt des Umkreises des regulären m-Ecks in irgend einer der f Seitenflächen, AB eine Seite dieses Vielecks, C die Mitte dieser Seite und bezeichnet σ in der Oberfläche der Umkugel als Einheit den Inhalt des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks, welches durch Projektion des Dreiecks ACM aus dem Kugelmittelpunkte O erhalten wird, so ist

$2fm\sigma$ die in Rede stehende Artzahl. In Verbindung mit den Beziehungen $pe = mf = 2k$ von Nr. 53 kann hierfür auch $2ep\sigma$ oder $4k\sigma$ geschrieben werden.

Aufgabe 65. Wie wird dies sphärisch gedeutet?

[Durch Zusammenfügung der sphärischen Zentridreiecke entweder zu f sphärischen „Seitenflächenpolygonen", oder zu k „sphärischen Rhomben", oder aber zu e „sphärischen Eckpunktenpolygonen".]

Ein Sternpolyeder kann nicht zu gleicher Zeit in den Seitenflächen reguläre Vielecke erster Art und in den Eckpunkten reguläre Vielkante erster Art besitzen, weil dies nur den fünf regulären Polyedern zukommt; also sind in dieser Hinsicht vom theoretischen Standpunkte aus noch drei Fälle möglich. Allein es stellt sich heraus, daß es Sternpolyeder, für welche Ecken und Flächen beide von Gebilden höherer Art begrenzt werden, nicht gibt. Deshalb heißt ein Sternpolyeder mit e Ecken und f Flächen entweder ein „e-eckiges Stern-f-flach" oder ein „f-flächiges Stern-e-eck", je nachdem die Vielecke oder die Vielkante höherer Art sind.

Die Sternpolygone können mit Hilfe verschiedener Konstruktionen aus den regulären Polyedern abgeleitet werden. Wir beschränken uns hier auf die erste von den zwei hauptsächlichsten, welche beide mit regulären Vielkanten in Verbindung stehen. Von diesen Konstruktionen operiert die erste mit durch einen Eckpunkt gehenden Kanten und Diagonalen gleicher Länge, die zweite mit Kränzen durch einen Eckpunkt gehender und zum Hauptstrahl dieses Punktes gleich geneigter mit dem Polyeder verbundener Ebenen; dabei muß dann jedesmal noch untersucht werden, ob die in sämtlichen Eckpunkten auftretenden Vielkante einander in der Weise ergänzen, daß die in den Seitenflächen liegenden Kanten kongruente reguläre Polygone und die sämtlichen Seitenflächen ein reguläres Polyeder einschließen.

Die drei regulären Polyeder mit vier, sechs und acht Flächen bilden kein Sternpolyeder; nur kann man die dem Würfel einbeschriebenen Tetraeder, zu welchen man durch Betrachtung der Flächendiagonalen des Würfels gelangt, zusammen als ein „diskontinuierliches" Sternpolyeder deuten,

wobei dann das diesen Tetraedern inhaltlich gemeinsame Oktaeder als Kernpolyeder auftritt.

Beim *Dodekaeder* bilden die in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten ein reguläres Dreikant; weil es keine reguläre Dreikante höherer Art gibt [46], können wir sogleich zu den Diagonalen übergehen. Von diesen bilden die sechs Flächendiagonalen durch den Eckpunkt 1 (Fig. 50[a]) zwei reguläre Dreikante [(1, 3), (1, 10), (1, 14)], [(1, 4), (1, 13), (1, 7)], welche zwei rechtwinklige Achsenkreuze sind und also zu den fünf einbeschriebenen Würfeln [53] zurückführen. Ebenso

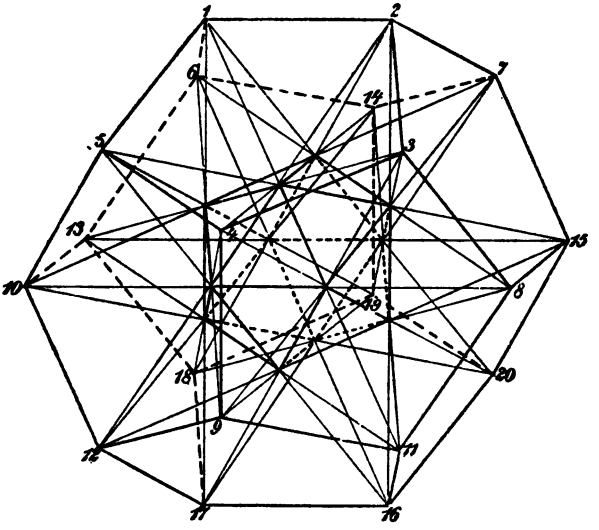


Fig. 53.

bilden die sechs nächstgrößeren Diagonalen durch 1 zwei reguläre Dreikante [(1, 8), (1, 12), (1, 19)], [(1, 9), (1, 18), (1, 15)], und sie führen also als Kanten eingeschriebener Tetraeder zu den auch schon aufgefundenen Gruppen von Tetraedern. Deshalb kann nur das Dreikant [(1, 11), (1, 17), (1, 20)] der in bezug auf ihre Länge nur vom Durchmesser (1, 16) der Umkugel übertroffenen Diagonalen durch 1 ein Sternpolyeder liefern, wie wirklich (Fig. 53) auch der Fall ist. Denn die Ebene [(1, 11), (1, 20)] ist parallel zur Seitenfläche (2, 3, 8, 15, 7) und enthält also das Sternfünfeck

(1, 11, 14, 4, 20); d. h. die $\frac{20\times 3}{2} = 30$ Kanten dieser 20 kongruenten regulären Dreikante liegen zu je fünf in 12 Ebenen, in welchen sie die Seiten von kongruenten Sternfünfecken bilden, und diese 12 Ebenen schließen ein Dodekaeder ein. Dieses Sternpolyeder mit 20 Eckpunkten und 12 Seitenflächen ist ein *20-eckiges Stern-12-flach* siebenter Art.

Aufgabe 66. Beweise diese Behauptung.

[Projiziert man (Fig. 53) das Sternfünfeck (1, 11, 14, 4, 20) aus O auf die Kugelfläche, so erhält man ein sphärisches Sternfünfeck, welches den zur Ebene (2, 3, 8, 15, 7) senkrechten Durchmesser zur Achse hat. Ist O' der mit O auf verschiedenen Seiten der Ebene liegende Endpunkt dieses Durchmessers, so ist das sphärische Dreieck mit den Eckpunkten O', 1, 11 der fünfte Teil des Sternfünfecks und nun läßt sich der Inhalt dieses Dreiecks leicht ausdrücken in den zwölften Teilen der Kugelfläche, welche im regulären Kugelnetze des Dodekaeders den Seitenflächen entsprechen. Denn man kann (Fig. 50[a]) das sphärische Dreieck (O', 1, 11), betrachten als die Summe von drei sphärischen Vierecken, welche, wenn β' die Projektion der Mitte β der Kante (3, 4) bildet, als (O', 2, 3, 8), (1, 2, 3, β'), (3, 8, 11, β') zu bezeichnen sind, und von diesen drei Vierecken mißt das erste zwei Fünftel und jedes der beiden übrigen die Hälfte eines zwölften Teiles der Kugeloberfläche. Also wird die gesuchte Zahl x aus der Gleichung $\frac{1}{60}x = (\frac{2}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2})\frac{1}{12}$ bestimmt.]

Es ist nicht leicht, von den Sternpolyedern konstruktiv ein das Auge befriedigendes Bild zu entwerfen. Wahrscheinlich deshalb verwenden Rouché und de Comberousse in ihrem hervorragenden „Traité de géométrie" Parallelprojektionen, welche — unseren Figuren 50[a] und 52[a] entsprechend — auf ganz schöne Weise mittels Schatten und Schlagschatten das Relief erzielen. Für die übrigen Sternpolyeder verweisen wir auf diese Bilder.

Beim *Ikosaeder* bilden die in eine Ecke zusammenlaufenden Kanten ein reguläres Fünfkant und man erhält (Fig. 52[a]) durch andere Anordnung der Kanten das Sternfünfkant [(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 3), (1, 5)], was zu einem

12-flächigen Stern-12-ecke dritter Art führt. Denn es enthält die Ebene [(1, 2), (1, 4)] das Fünfeck (1, 2, 10, 11, 4), und die 12 Ebenen, welche solche Fünfecke enthalten, schließen ein Dodekaeder ein; außerdem besteht das dem Fünfecke (1, 2, 10, 11, 4) entsprechende sphärische Polygon aus 5 der 20 gleichseitigen sphärischen Dreiecke und bedecken die 12 sphärischen Polygone deshalb die Kugelfläche dreimal.

Die fünf vom Durchmesser (1, 12) verschiedenen Körperdiagonalen (1, 7), (1, 8), (1, 9), (1, 10), (1, 11) durch die Ecke 1 bilden ein reguläres Fünfkant, welches zu zwei verschiedenen neuen Sternpolyedern führt. Betrachtet man es zunächst als Fünfkant erster Art, so findet man die nämlichen 12 Ebenen und also das nämliche Kernpolyeder wie oben; dabei tritt jedoch dieser Unterschied ein, daß jetzt die Ecken erster Art sind und in den Ebenen Sternfünfecke liegen, während oben umgekehrt die Fünfecke erster Art und die Fünfkante Sternfünfkante waren. Also ist das resultierende Polyeder ein *12-eckiges Stern-12-flach*, ebenfalls von der dritten Art; denn das sphärische Polygon, welches die Mittelpunktsprojektion der auf der Seitenfläche (1, 2, 10, 11, 4) durch (1, 2) und (1, 4) stehenden fünfseitigen Pyramide bildet, enthält wieder 5 der 20 gleichseitigen Dreiecke. Betrachtet man aber zweitens das in Rede stehende Fünfkant als ein Sternfünfkant [(1, 7), (1, 9), (1, 11, (1, 8), (1, 10)], so findet man 20 dreieckige Ebenen (1, 9, 11), welche der Reihe nach den Seitenflächen (10, 3, 2) des Ikosaeders parallel sind und deshalb einen Ikosaederkern einschließen. Hierdurch erhält man das vierte und letzte Sternpolyeder, welches ein *20-flächiges Stern-12-eck* siebenter Art ist.

Aufgabe 67. Leite auch diese Artzahl ab.

[Man kann sich auf die Reziprozität berufen.]

Die kennzeichnenden Größen der vier Sternpolyeder sind in der Reihenfolge der Ableitung enthalten in folgender kleinen Tabelle,

	m	p	e	k	f	σ_e	σ_f	σ_p
I	5	3	20	30	12	1	2	7
II	5	5	12	30	12	2	1	3
III	5	5	12	30	12	1	2	3
IV	3	5	12	30	20	2	1	7

wo σ_e, σ_f σ_p der Reihe nach die Artzahlen der in den Eckpunkten auftretenden Vielkante, der in den Seitenflächen liegenden Vielecke und des Sternpolyeders bezeichnen.

Aufgabe 68. Beweise die Beziehung $2\sigma_p = e\sigma_e + f\sigma_f - k$.

58. Die Schläflische Ableitung der Artzahlen. Liegt in einem Raume R_n ein reguläres Polytop vor, so kann die Artzahl dieses Gebildes auch dadurch bestimmt werden, daß man untersucht, wie oft ein vom Mittelpunkte O ausgehender, sich einer durch O gehenden Geraden entlang bewegender Punkt die Begrenzung durchsetzen muß, bis er sich außerhalb des Umkugelraumes von $n-1$ Dimensionen befindet. Diese von Schläfli für $n=4$ verwendete Methode muß hier als Vorstudium auf $n=3$ appliziert werden; dabei beschränken wir uns aber auf das zweite und das letzte der vier Sternpolyeder, indem wir zunächst für beide eine geometrische, und nachher für das letzte eine analytische Lösung angeben.

Betrachten wir (Fig. 52c) die von O aus nach oben gerichtete Gerade, so ergibt sich, daß von den zwölf Grenzebenen des zweiten Sternpolyeders die drei

(2, 3, 4, 5, 6), (3, 1, 6, 9, 10), (1, 2, 10, 11, 4)

durch die nach oben gerichtete Gerade durch O in Punkten innerhalb der regulären Fünfecke geschnitten werden; deshalb ist die Artzahl drei. Und von den zwanzig gleichseitigen Dreiecken, welche das vierte Sternpolyeder begrenzen, nämlich

(1, 9, 11)	(3, 6, 12)	(2, 12, 5)	(4, 6, 12)
(2, 11, 5)	(1, 10, 8)	(3, 7, 9)	(6, 10, 7)
(3, 5, 9)	(2, 4, 12)	(1, 7, 9)	(10, 4, 8)
(1, 10, 7)	(3, 6, 7)	(2, 8, 11)	(4, 6, 10)
(2, 4, 8)	(1, 8, 11)	(3, 12, 5)	(5, 9, 11)

werden

(1, 9, 11), (2, 11, 5), (3, 5, 9), (4, 6, 10)

in Punkten innerhalb der Dreiecke geschnitten, während die angenommene Gerade weiter den Paaren von Dreiecken

$$\left.\begin{matrix}(1,10,7)\\(1,10,8)\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}(2,4,8)\\(2,4,12)\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}(3,6,12)\\(3,6,7)\end{matrix}\right\}$$

in der ihnen gemeinschaftlichen Seite begegnet; also ist die Artzahl $4+3=7$.

Bei der analytischen Behandlung denke man sich drei Punkte P_i mit den Massen p_i und den Koordinaten x_i, y_i, z_i, $(i=1,2,3)$. Es sind dann, für $p_1+p_2+p_3=1$,

$$\left.\begin{aligned} x &= p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 \\ y &= p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3 \\ z &= p_1 z_1 + p_2 z_2 + p_3 z_3 \end{aligned}\right\}$$

die Koordinaten des Schwerpunktes. Bestimmt man nun die Größen p_i aus den drei Gleichungen

$$p_1+p_2+p_3=1,\quad p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3=0,\quad p_1y_1+p_2y_2+p_3y_3=0,$$

so findet man, durch Einführung dieser Werte in z, in welchem Punkte P die Achse OZ die Ebene $P_1P_2P_3$ schneidet. Sind die für die p_i gefundenen Werte sämtlich positiv, so liegt der Schnittpunkt P *innerhalb* des Dreiecks $P_1P_2P_3$; ist außerdem z positiv, so schneidet die Ebene des Dreiecks den nach oben gerichteten Durchmesser der Umkugel. Wenden wir diese Methode auf die zwanzig dreieckigen Flächen des vierten Sternpolyeders an, so ordnen wir diese in bezug auf ihre Lageverhältnisse zur Achse OZ (Fig. 52[a]) als

(1, 7, 9)	(2, 5, 11)	(2, 8, 11)	(2, 4, 12)
(1, 8, 10)	(3, 6, 7)	(3, 9, 7)	(3, 5, 12)
(1, 9, 11)	(4, 2, 8)	(4, 10, 8)	(4, 6, 12)
(1, 10, 7)	(5, 3, 9)	(5, 11, 9)	(5, 2, 12)
(1, 11, 8)	(6, 4, 10)	(6, 7, 10)	(6, 3, 12)

und dann ergibt sich, daß die erste Kolonne zwei, die zweite Kolonne fünf Schnittpunkte liefert, während keine der beiden anderen Kolonnen noch einen weiteren Schnittpunkt herbeiführt. Die erste Gruppe von fünf Ebenen besteht offenbar aus lauter Ebenen durch den Punkt 1 auf der Achse OZ. Weil die fünf Ebenen aber ein Fünfkant *zweiter* Art bilden, so wird eine durch O gehende und mit OZ einen kleinen Winkel einschließende Gerade jedoch nur zwei dieser Ebenen innerhalb der in ihnen enthaltenen Winkel treffen. Und in

Verbindung mit den Resultaten von Nr. 56 sind die Koordinaten der Eckpunkte irgend eines der fünf gleichseitigen Dreiecke der zweiten Gruppe in der Länge des Umradius als Einheit in der Form

x	y	z
$\frac{2}{5}\sqrt{5}\sin(\varphi - \frac{2}{5}\pi)$	$\frac{2}{5}\sqrt{5}\cos(\varphi - \frac{2}{5}\pi)$	$\frac{1}{5}\sqrt{5}$
$\frac{2}{5}\sqrt{5}\sin(\varphi + \frac{2}{5}\pi)$	$\frac{2}{5}\sqrt{5}\cos(\varphi + \frac{2}{5}\pi)$	$\frac{1}{5}\sqrt{5}$
$-\frac{2}{5}\sqrt{5}\sin\varphi$	$-\frac{2}{5}\sqrt{5}\cos\varphi$	$-\frac{1}{5}\sqrt{5}$

zu schreiben. Aus den Bedingungen, daß die x und y des Schwerpunktes verschwinden sollen, folgt dann unmittelbar

$$\frac{p_1}{1} = \frac{p_2}{1} = \frac{p_3}{2\cos\frac{2}{5}\pi} = \frac{z\sqrt{5}}{2(1-\cos\frac{2}{5}\pi)},$$

d. h. die fünf Ebenen schneiden die positive Achse OZ im nämlichen Punkte und dieser Punkt liegt innerhalb der fünf gleichseitigen Dreiecke.

59. Die regulären Polyeder und die Gruppentheorie. Wir haben uns jetzt mit der endlichen Gruppe der Bewegungen zu beschäftigen, welche irgend ein reguläres Vielflach in sich transformieren. Natürlich handelt es sich hierbei um Drehungen um eine Achse durch den Mittelpunkt. Deshalb kann ein Schnittpunkt einer solchen Achse mit der Polyederbegrenzung nur eine Ecke oder eine Kantenmitte oder aber ein Flächenmittelpunkt, die Achse selbst also nur einer der Hauptstrahlen OE_0, OK_0, OF_0 sein. Und weil die Vielecke der Seitenflächen 3, 4 oder 5 Seiten, die Vielkante der Eckpunkte 3, 4 oder 5 Kanten haben, so ist die Drehung um eine Achse OE_0 oder eine Achse OF_0 von der Periode 3, 4 oder 5, während die Drehung um eine Achse OK_0 immer die Periode 2 hat. Obgleich nun hiermit die Operationen erschöpft sind, würde es dennoch nötig sein, jedes der fünf regulären Polyeder zu prüfen auf die Art und Weise, wie die verschiedenen Operationen sich zu einer Gruppe kombinieren, wäre es nicht so, daß die schon öfters hervorgehobene Reziprozität uns teilweise von dieser Arbeit entlastet.

Bei der Versinnlichung der Zweiflachdrehungen mittels des geometrischen Raumbildes der Erdkugel mit ihren Polen [49] haben wir angenommen, daß das Zeichen irgend einer Drehung um die Hauptachse sich immer auf die feste Achse und niemals auf die durch Umlegung des Äquators um eine Nebenachse umgewendete Hauptachse beziehen soll; wir behalten hier diese Annahme ungeändert bei.

Die Gruppe der Tetraeder. Die Gruppe eines Tetraeders besteht aus Drehungen $E = F$ um Hauptstrahlen $OE_0 = OF_0$ und Drehungen K um Hauptstrahlen OK_0, die ersteren von der Periode drei, die letzteren von der Periode zwei. Da es vier Hauptstrahlen $OE_0 = OF_0$ und drei Hauptstrahlen OK_0 gibt, so ist der Grad der Gruppe, d. h. die Anzahl der verschiedenen Lagen, die ursprüngliche Lage mit einbegriffen,

$$1 + 4(3 - 1) + 3(2 - 1) = 12.$$

In dieser Gleichung entspricht die Einheit der ursprünglichen Lage und sind die eingeklammerten Periodenzahlen 3, 2 um die Einheit verringert worden, um diese ursprüngliche Lage nicht öfter in Rechnung zu bringen.

Es bleibt noch zu untersuchen, wie die zwei verschiedenen Systeme von Operationen E und K in der Gruppe enthalten sind. Dazu bemerken wir, daß eine Drehung E einen Eckpunkt unbeweglich läßt und die drei anderen zyklisch ineinander überführt, während die vier Punkte bei einer Drehung K in zwei Paare geteilt sind und die Konstituenten jedes dieser Paare ihre Lagen vertauschen. Legt man den Eckpunkten die Ziffern 1, 2, 3, 4 bei, so sind also die Drehungen E durch das Symbol $[1\,(2\,3\,4)]$, die Drehungen K durch das Symbol $[(1\,2)\,(3\,4)]$ zu kennzeichnen. Hieraus geht dann hervor, daß die Gruppe des Tetraeders gruppentheoretisch identisch ist mit der Gruppe der *geraden* Vertauschungen von vier Elementen; denn die zyklische Vertauschung $(2\,3\,4)$ ist durch die zweimalige Vertauschung zweier Elemente zu erzielen. Weiter liefern zwei Drehungen K um verschiedene Hauptstrahlen OK_0 immer eine Drehung K um den dritten Hauptstrahl OK_0, während das Produkt zweier Drehungen E um verschiedene Hauptstrahlen OE_0 entweder eine Drehung E oder eine Drehung K sein kann; also bilden nur die Drehungen K eine Untergruppe der Tetraedergruppe.

Weil die Tetraedergruppe nur eine Untergruppe enthält, so muß diese eine ausgezeichnete Untergruppe sein, oder aber es muß EKE^{-1} der Periode nach mit K übereinstimmen und deshalb auch eine Drehung K sein; der Beweis dieser Behauptung wird schon durch die Bemerkung geliefert, daß jede Operation dieser Untergruppe das System der Hauptstrahlen OF_0 des Hexaeders in sich transformiert. Die ausgezeichnete Untergruppe der Drehungen K ist, weil sie vom vierten Grade ist, als die *Vierergruppe* bekannt; sie bildet den einfachsten Fall $m = 2$ der metazyklischen Gruppe der Ebene [49], wo man sich das Zweiflach durch ein Achsenkreuz ersetzt denken kann.

Die Gruppe von Hexaeder und Oktaeder. Durch Abzählung der verschiedenen Drehungen E, K, F, welchen beim Hexaeder der Reihe nach die Periode 3, 2, 4 zukommt, findet man für den Grad der Hexaedergruppe

$$1 + 4(3 - 1) + 6(2 - 1) + 3(4 - 1) = 24.$$

Alle Drehungen, welche eines der zwei Quadrupel nicht benachbarter Hexaederecken in sich transformieren, haben diese Eigenschaft auch in bezug auf das andere und deshalb auch in bezug auf das Hexaeder, d. h. die Tetraedergruppe vom Grade 12 ist als Untergruppe in der Hexaedergruppe vom Grade 24 enthalten. Offenbar muß die Tetraedergruppe weiter zur Hexaedergruppe ergänzt werden durch Drehungen, welche die zwei Tetraeder miteinander vertauschen, nämlich die sechs Drehungen K und drei Paar Drehungen F um einen Winkel $\pm\frac{\pi}{2}$. Diese neuen Drehungen können keine neue Untergruppe bilden; denn das Produkt von irgend zwei derselben gehört der Tetraedergruppe an, weil die Aufeinanderfolge von irgend zwei Tetraedervertauschungen auf die Transformation jedes der beiden Tetraeder in sich hinauskommt. Also muß die Tetraedergruppe, weil es keine andere Untergruppe vom Grade 12 gibt, eine ausgezeichnete Untergruppe der Hexaedergruppe sein; wirklich ist PTP^{-1}, wo T eine Operation der Tetraedergruppe und P eine andere Operation der Hexaedergruppe bedeutet, immer wieder eine Operation mit zwei Tetraedervertauschungen, usw.

Bei den Transformationen des Hexaeders in sich wird

das Quadrupel der Körperdiagonalen ebenfalls in sich transformiert; legt man diesen Diagonalen die Ziffern 1, 2, 3, 4 bei, so ergibt sich also, daß die Hexaedergruppe gruppentheoretisch identisch sein muß mit der Gruppe der Vertauschungen dieser vier Elemente. Dabei entsprechen den Drehungen E, K, F der Hexaedergruppe der Reihe nach die Symbole [1 (2 3 4)], [1 2 (3 4)], [(1 2 3 4)].

Die Gruppe von Dodekaeder und Ikosaeder. Die Abzählung der beim Dodekaeder auftretenden Drehungen E, K, F liefert für den Grad der Dodekaedergruppe

$$1 + 10\,(3 - 1) + 15\,(2 - 1) + 6\,(5 - 1) = 60\,.$$

Bei der Dodekaedergruppe treten zum ersten Male zyklische Untergruppen mit der Periode 5 auf; in Verbindung hiermit ist der Grad durch fünf teilbar. Und nun zeigt sich weiter leicht, daß die Dodekaedergruppe gruppentheoretisch identisch ist mit der Gruppe der *geraden* Vertauschungen von fünf Elementen, den fünf Achsenkreuzen der fünfzehn Hauptstrahlen OK_0. Denn ein Blick (Fig. 54) auf die Anordnung dieser mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 belegten Achsenkreuze genügt, um einzusehen, daß die Drehungen E, K, F der Reihe nach durch die Symbole [1 2 (3 4 5)], [1 (2 3) (4 5)], [(1 2 3 4 5)] versinnlicht werden, wo $(abc\ldots)$ wieder eine zyklische Vertauschung angibt, und diese Operationen bilden zusammen die geraden Vertauschungen der fünf Elemente, deren Anzahl bekanntlich sechzig ist.

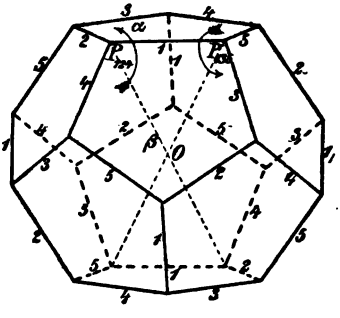


Fig. 54.

Die Dodekaedergruppe ist insofern einfach, als sie keine ausgezeichnete Untergruppe enthält. Zunächst ergibt sich, daß weder alle Drehungen E, noch alle Drehungen K, noch alle Drehungen F eine Gruppe bilden. So ist (Fig. 54) das Produkt EE' der Drehungen $(1, \vec{3}, 5)$ und $(1, \vec{2}, 4)$ um die Hauptstrahlen OE_0 durch P_{135} und P_{124} eine Drehung F, weil es die Deckfläche α des Dodekaeders in

ihre ursprüngliche Lage zurückbringt. So ist das Produkt FF' der Drehungen $(P_{124}\,P_{135}\ldots)$ und $(P_{135}\,P_{124}\ldots)$ um die zur Deckfläche und zur Vorderfläche β senkrechten Hauptstrahlen OF_0 eine Drehung E, weil es den Eckpunkt P_{124} in seine ursprüngliche Lage zurückführt, usw.

Schließlich sei bemerkt, daß die Dodekaedergruppe fünf gleichberechtigte Vierergruppen enthält, weil die fünfzehn Haupstrahlen OK_0 sich in fünf Achsenkreuze zerlegen lassen.

Allgemeine Endergebnisse. Betrachtet man allgemein ein regelmäßiges Polyeder (e, k, f), für welches die Seitenflächen und die Ecken m-Ecke und p-Kante sind, so gibt

$$1 + \frac{e}{2}(p-1) + \frac{k}{2}(2-1) + \frac{f}{2}(m-1)$$

den Grad der Gruppe an; weil diese Zahl mit Hilfe der Beziehungen $pe = mf = 2k$ und $e - k + f = 2$ in $2k$ übergeht gilt allgemein der Satz:

„Der Grad einer Polyedergruppe ist die doppelte Kantenzahl des Polyeders."

Es ist auch wirklich die Art des Zusammenfallens eines regulären Körpers $ABCD\ldots$ mit einer gegebenen Lage $PQRS\ldots$ des nämlichen Körpers oder, wie wir sagen wollen, die „Orientierung" von $ABCD\ldots$ in bezug auf $PQRS\ldots$ bestimmt, wenn die Lage des mit P zusammenfallenden Eckpunktes A und der mit PQ zusammenfallenden Kante AB angewiesen ist. Also ist der Grad der Gruppe das Produkt ep der Eckenzahl e mit der Zahl p der durch einen Eckpunkt gehenden Kanten. Und dieses Produkt [58a] ist offenbar der doppelten Kantenzahl gleich.

Aufgabe 69. Weise nach, weshalb das Tetraeder sich dem allgemeinen Gesetze unterordnet, obgleich es nur zwei Gattungen von Drehungen zuläßt.

Es gilt weiter der allgemeine Satz:

„Jede Polyedergruppe kann mit Hilfe von zwei Operationen erzeugt werden."

Man überzeugt sich leicht von der Wahrheit dieses Satzes, indem man bei der Tetraedergruppe von $[1\,(2\,3\,4)] = e$, $[(1\,2)\,(3\,4)] = k$, bei der Hexaedergruppe von $[1\,(2\,3\,4)] = e$

und $[(1\ 2)\ 3\ 4] = k$, bei der Dodekaedergruppe von $[1\ 2\ (3\ 4\ 5)] = e$, $[(1\ 3)\ (2\ 4)\ (5)] = k$ ausgeht.

60. Symmetrieebenen der regulären Polyeder. Der Zweiraum. Eine einfache Betrachtung der regulären Polyeder zeigt, daß ein Tetraeder 6, ein Hexaeder und ein Oktaeder 9, ein Dodekaeder und ein Ikosaeder 15 Symmetrieebenen besitzt. Eine Symmetrieebene des Tetraeders enthält immer eine Kante und steht auf der Gegenkante senkrecht. Von den neun Symmetrieebenen des Hexaeders gehen die sechs Symmetrieebenen der beiden einbeschriebenen Tetraeder durch zwei Gegenkanten hindurch und sind die drei übrigen zu Quadrupeln von Kanten senkrecht und zu Paaren von Gegenflächen parallel. Und jede der fünfzehn Symmetrieebenen des Dodekaeders enthält zwei Gegenkanten.

Eine *Spiegelung* eines regulären Polyeders in bezug auf irgend eine seiner Symmetrieebenen stellt offenbar eine Transformation dieses Körpers in sich dar, welche durch Drehung nicht verwirklicht werden kann. Denn bei einer Spiegelung wird in jeder Seitenfläche die Reihenfolge der Elemente des m-Ecks und in jeder Ecke die Reihenfolge der Elemente des p-Kants umgekehrt. Weil das Produkt zweier Spiegelungen in verschiedenen Symmetrieebenen überall die ursprüngliche Reihenfolge wiederkehren läßt und deshalb eine Drehung ist, bilden die Spiegelungen an sich keine Gruppe; allein man kann natürlich Drehungen und Spiegelungen wieder zu einer erweiterten Gruppe von Transformationen in sich vereinen. Von dieser erweiterten Gruppe, welche wir nun noch ein wenig eingehender untersuchen, bildet die Gruppe der Drehungen dann natürlich eine ausgezeichnete Untergruppe.

Ebenso wie eine Spiegelung in der Ebene in bezug auf eine Gerade dieser Ebene als eine Umlegung der Ebene um diese Gerade durch den Raum hindurch zu deuten ist, kann eine Spiegelung des Raumes in bezug auf eine seiner Ebenen betrachtet werden als eine bestimmte Bewegung dieses Raumes durch einen ihn enthaltenden Raum R_4 hindurch. Ist $O(XYZ)$ ein gegebenes Achsenkreuz des Raumes und OU in einem durch ihn gehenden R_4 zu ihm senkrecht, so bringt die Bewegung dieses R_4, wobei von den zwei in O zueinander senkrechten Ebenen $O(XY)$ und $O(ZU)$ die zweite

sich um die erste um einen Winkel von 180° dreht (I 112), das vierdimensionale Achsenkreuz $O(XYZU)$ in die Lage $O(XYZ'U')$. Beschränkt man seine Aufmerksamkeit auf den Einfluß dieser Bewegung im R_4 auf die Lage der Punkte des Raumes $O(XYZ)$, so findet man, daß dieser Raum sich rücksichtlich der Ebene $O(XY)$ gespiegelt und dabei — wegen des Überganges von OU in OU' — seine beiden Seiten miteinander vertauscht hat. In diesem als *Zweiraum* zu deutenden Raume ist dann auch die Reihenfolge der drei Achsen umgekehrt, weil eine der drei Achsen ihre Richtung umgekehrt hat.

Weil die Drehung des Zweiraumes selbstverständlich die Periode zwei hat, so läuft die Erweiterung der Polyedergruppen mittels Spiegelung auf eine Verdoppelung ihrer Grade hinaus. Diese erweiterten Gruppen mit den Graden 24, 48 und 120 können — mit Ausnahme der ersten — nicht so einfach symbolisiert werden. Bei der Spiegelung des Tetraeders in bezug auf die Symmetrieebene durch eine bestimmte Kante vertauschen die Ecken der Gegenkante ihre Stellen; also ist die erweiterte Tetraedergruppe mit der Gruppe *aller* Vertauschungen von vier Elementen und deshalb auch mit der nicht erweiterten Hexaedergruppe isomorph.

Den erweiterten Polyedergruppen entsprechen nun auch *erweiterte* Kugelnetze. Sie entstehen, wenn man jedes der sphärischen Polygone des regulären Netzes durch Verbindung des sphärischen Mittelpunktes mit den Eckpunkten und den Seitenmitten in kongruente rechtwinklige sphärische Dreiecke zerschneidet; dabei erhält man dann in Übereinstimmung mit den Graden der erweiterten Gruppen der Reihe nach 24, 48, 120 Dreiecke, deren Winkel in 180° als Einheit ausgedrückt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5})$ betragen. Mittels der Transformationen der erweiterten Gruppen kann man irgend ein Dreieck des erweiterten Netzes in irgend ein anderes Dreieck des nämlichen Netzes überführen. Und nach den Eckpunkten dieser Dreiecke teilt dieses Punktsystem sich in drei Gruppen, deren erste die e Ecken, deren zweite die k Kantenmitten und deren dritte die f Flächenmittelpunkte enthält. Selbstverständlich hängen diese drei Punktgruppen der Umkugel so miteinander zusammen, daß irgend eine Drehung oder Spiegelung des

Polyeders, welche eine dieser Gruppen in sich transformiert, dies auch in bezug auf die beiden übrigen tut. Dieser Gedanke ist, wie F. Klein wohl zum ersten Male entwickelt hat, für die Theorie der Kovarianten der binären Formen wichtig. Projiziert man nämlich die drei Gruppen aus einem Punkte N der Umkugel auf die Berührungsebene im Gegenpunkte S und betrachtet nun die auf ein in dieser Ebene gegebenes rechtwinkliges System $S(X, Y)$ bezogenen Koordinaten (x, y) der Projektionen als Bestandteile der komplexen Koordinate $z = x + iy$ und diese komplexen Koordinaten z als die Wurzelgruppen dreier Gleichungen $E(z) = 0$, $K(z) = 0$, $F(z) = 0$, so müssen die drei Formen $E(z)$, $K(z)$, $F(z)$ die Eigenschaft besitzen, daß irgend eine von ihnen die beiden anderen zu Kovarianten hat. Und wirklich ergibt sich bei Ausarbeitung der angegebenen Begriffe, daß zwei der drei Formen immer mit bestimmten Kovarianten der dritten Form zusammenhängen, nämlich mit der Hesseschen Kovariante und mit der Jacobischen Funktionaldeterminante. Für diesen Punkt vergleiche man die oben angeführten *„Vorlesungen über das Ikosaeder"*, usw., wo nicht von Hexaeder- und Dodekaeder-, sondern von Oktaeder- und Ikosaedergruppe gesprochen wird, weil dort die Punktsysteme in den Vordergrund treten.

61. Halbreguläre Polyeder. Bei der Definition der halbregulären Polyeder betrachtet man als *Ecke* A die Figur der im Eckpunkte A auslaufenden Kanten AB, AC, ... mit Inbegriff der Längen dieser Kanten und der von ihnen zu je zwei gebildeten Winkel, als *Kante* AB die Figur der beiden Vielkante A und B mit Inbegriff von Kantenlängen und Winkelgrößen, als *Fläche* ε das in dieser Seitenfläche liegende Vieleck mit Inbegriff der anliegenden Diederwinkel. Es heißt dann ein Polyeder *gleicheckig*, wenn die Ecken, *gleichkantig*, wenn die Kanten, *gleichflächig*, wenn die Flächen sämtlich kongruent sind; hierbei ist allerdings negative Kongruenz oder Symmetrie zugelassen. Also sind die regulären Vielflache zu gleicher Zeit gleicheckig, gleichkantig und gleichflächig.

Aufgabe 70. Welches sind die einfachsten Beispiele von einem gleicheckigen oder einem gleichflächigen Vielflache?

[Man betrachte die Körper, für welche $(\pm a, \pm b, \pm c)$ entweder die rechtwinkligen Koordinaten der Eckpunkte oder die rechtwinkligen Koordinaten der Seitenflächen darstellen.]

Aufgabe 71. Ist ein Polyeder, das zu gleicher Zeit gleicheckig und gleichflächig ist, nicht schon deshalb regulär?

[Man betrachte das Vierflach mit den Eckpunkten $(a, \pm b, 0)$, $(-a, 0, \pm b)$, welches nur für $b = a\sqrt{2}$ ein reguläres Tetraeder wird.]

Es gibt zwei Systeme von halbregulären Polyedern. Denn ein gleicheckiges Polyeder heißt halbregulär, wenn seine Flächen reguläre Polygone sind, und ein gleichflächiges Polyeder heißt halbregulär, wenn seine Ecken reguläre Vielkante sind. Von diesen zwei Systemen, welche einander polar-reziprok gegenüberstehen, bildet das erste, zu dessen Untersuchung wir nun sofort übergehen, das System der *Archimedischen* Vielflache.

Ein gleicheckiges halbreguläres Vielflach wird mindestens von zwei verschiedenen Arten von regulären Polygonen begrenzt, weil es sonst regulär wäre. Andererseits können in einer Ecke höchstens fünf Seitenflächen zusammenstoßen, und unter diesen können sich nur zwei oder drei Arten von Vielecken befinden; ist nämlich w_m der Polygonwinkel des regulären m-Ecks, so ist sowohl $w_3 + w_4 + w_5 + w_6$ wie $5w_3 + w_4$ schon größer als 360^0. Deshalb gibt es nur zwei Gattungen von Archimedischen Körpern, Polyeder mit zwei und Polyeder mit drei Arten von Vielecken.

Wird ein Archimedisches Vielflach (e, k, f) begrenzt von m_1-Ecken, m_2-Ecken, m_3-Ecken, und treten diese der Reihe nach in der Anzahl f_1, f_2, f_3, und in irgend einem Eckpunkte in der Anzahl p_1, p_2, p_3 auf, so bestehen zwischen e und den neun Größen m_i, f_i, p_i die vier Beziehungen

$$m_1 f_1 = p_1 e, \quad m_2 f_2 = p_2 e, \quad m_3 f_3 = p_3 e,$$
$$f_1 + f_2 + f_3 + e = \tfrac{1}{2}(m_1 f_1 + m_2 f_2 + m_3 f_3) + 2.$$

Durch die Elimination von f_1, f_2, f_3 erhält man die einzige Beziehung

$$(56) \qquad \frac{p_1}{m_1} + \frac{p_2}{m_2} + \frac{p_3}{m_3} = \tfrac{1}{2}(p_1 + p_2 + p_3 - 2) + \frac{2}{e}$$

zwischen e und den sechs Größen m_i, p_i, wobei nur diejenigen ganzzahligen Lösungen zur Geltung gelangen, für welche

$$p_1 + p_2 + p_3 < 6, \quad m_3 > m_2 > m_1 \geqq 3$$

ist, und für den besonderen Fall der Polyeder mit zwei Arten von Vielecken für m_3 und p_3 Null gesetzt werden muß.

In Gestalt des Symboles $(e, k, f)\,(m_1{}^{f_1}_{p_1}, m_2{}^{f_2}_{p_2}, m_3{}^{f_3}_{p_3})$ enthält die folgende Tabelle die 15 möglichen Lösungen.

1 ..... $(12, 18, 8)$ $(3_1^4, 6_2^4)$	7 ..... $(24, 48, 26)$ $(3_1^8, 4_3^{18})$
2 ..... $(24, 36, 14)$ $(3_1^8, 8_2^6)$	8 ..... $(12, 24, 14)$ $(3_2^8, 4_2^6)$
3 ..... $(60, 90, 32)$ $(3_1^{20}, 10_2^{12})$	9 ..... $(30, 60, 32)$ $(3_2^{20}, 5_2^{12})$
4 ..... $(24, 36, 14)$ $(4_1^6, 6_2^8)$	10 .. $(2n, 4n, 2n+2)$ $(3_3^{2n}, n_1^2)$
5 ... $(2n, 3n, n+2)$ $(4_2^n, n_1^2)$	11 ..... $(24, 60, 38)$ $(3_4^{32}, 4_1^6)$
6 ..... $(60, 90, 32)$ $(5_1^{12}, 6_2^{20})$	12 .... $(60, 150, 92)$ $(3_4^{80}, 5_1^{12})$

13 .... $(48, 72, 26)$ $(4_1^{12}, 6_1^8, 8_1^6)$
14 .. $(120, 180, 62)$ $(4_1^{30}, 6_1^{20}, 10_1^{12})$
15 ... $(60, 120, 62)$ $(3_1^{20}, 4_2^{30}, 5_1^{12})$.

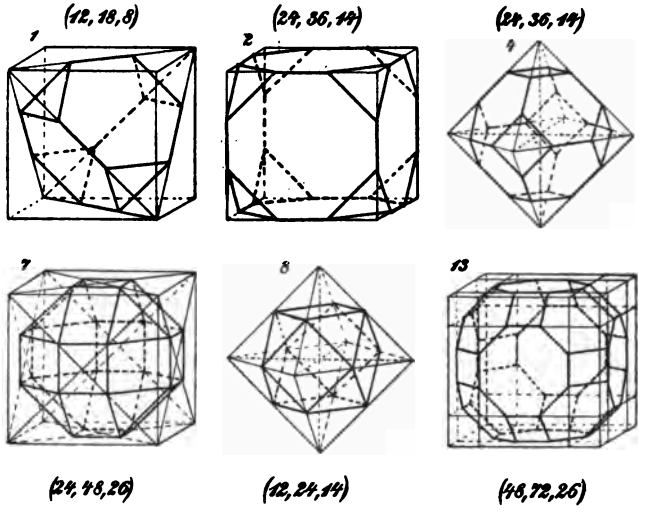


Fig. 55.

Von den zwölf Fällen der Polyeder mit zwei Gattungen von Vielecken beziehen sich die ersten sechs auf Polyeder mit dreikantigen, die folgenden vier auf Polyeder mit vierkantigen, die letzten zwei auf Polyeder mit fünfkantigen Ecken. Und weiter liegt der Reihenfolge das Anwachsen der Größen m_1, p_1, m_2, p_2 zugrunde. Die Fälle 5 und 10 sind hierdurch merkwürdig, daß jeder für sich eine ganze Reihe von Fällen vergegenwärtigt, die Reihe der regulären Prismen und die Reihe der regulären Antiprismen oder Prismoide; von einigen der übrigen Fälle ist in Fig. 55 mit den entsprechenden Nummern die Form angegeben. Wir bemerken, daß die Eckpunkte von den Körpern 8 und 9 der Reihe nach die Punktgruppen der Kantenmitten von Hexaeder-Oktaeder und Dodekaeder-Ikosaeder liefern.

Den obigen fünfzehn Archimedischen Polyedern stehen fünfzehn halbreguläre gleichflächige Polyeder polar-reziprok gegenüber; wir überlassen es dem Leser, sich mit diesen Körpern näher vertraut zu machen, kommen aber in der nächsten Nummer auf einige derselben zurück.

62. Die Kristallformen des regulären Systems. Hemiedrie. Kristallkombinationen. Bei der kristallographischen Behandlung der Kristalle des regulären Systems geht man von einem Polyeder aus, dessen Seitenflächen von den Achsen OX, OY, OZ eines rechtwinkligen Systems in irgend welcher Reihenfolge gegebene Stücke $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$ abschneiden. Von diesem Polyeder, welches als *Diamantoid* oder Hexakisoktaeder bekannt ist, zeigt Fig. 56 zur Genüge die Konstruktion der im positiven räumlichen Koordinatenwinkel liegenden Seitenflächen; dabei ergibt sich, daß es 6 Eckpunkte A_1, B_1, C_1, 12 Eckpunkte D, E, F, 8 Eckpunkte G,

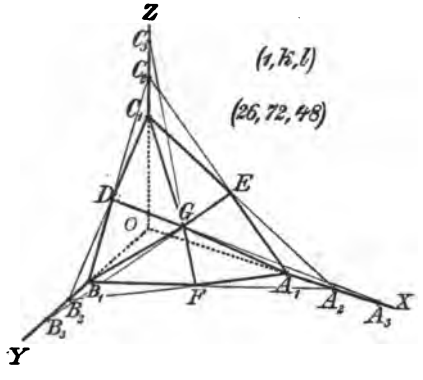


Fig. 56.

also 26 Eckpunkte, 24 Kanten A_1G, 24 Kanten A_1E, 24 Kanten DG, also 72 Kanten und 48 kongruente dreieckige Seitenflächen A_1EG hat, und somit ein gleichflächiges Polyeder (26, 72, 48) ist.

Die Form des Diamantoids wird durch die Verhältnisse der drei Größen a, b, c bestimmt; dabei setzen wir $a \leqq b \leqq c$ voraus und schreiben, durch a dividierend, $1, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}$ oder $1, k, l$ an Stelle von a, b, c, wo die zwei Parameter k, l der Bedingung $1 \leqq k \leqq l$ unterworfen sind. Und nun ergeben sich in den besonderen Fällen $(1, k, k)$ und $(1, 1, k)$ bekanntlich das Leuzitoeder oder Ikositetraeder und das Pyramidenoktaeder oder Triakisoktaeder (Fig. 57), in

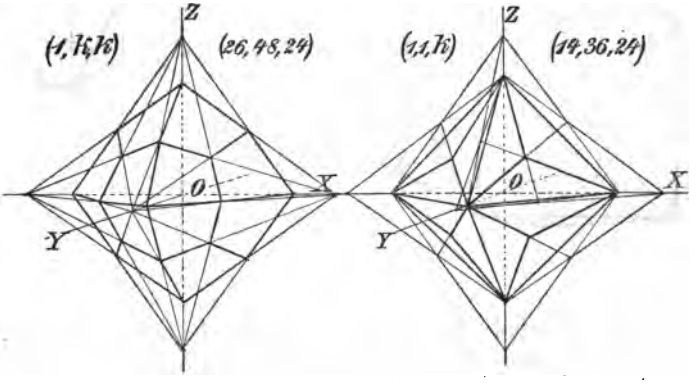


Fig. 57.

den besonderen Fällen $(1, k, \infty)$ und $(1, 1, \infty)$ das Pyramidenhexaeder oder Tetrakishexaeder und das Granatoeder oder Rhombendodekaeder (Fig. 58), während weitere Spezialisierung zu den Fällen $(1, 1, 1)$ des Oktaeders und $(1, \infty, \infty)$ des Hexaeders führt.

Das Granatoeder ist gleichflächig halbregulär und Pyramidenhexaeder, Leuzitoeder, Pyramidenoktaeder und Diamantoid werden es, wenn der Reihe nach $(1, 2, \infty)$, $(1, \sqrt{2}+1, \sqrt{2}+1)$, $(1, 1, \sqrt{2}+1)$, $(1, 3-\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2})$ für $(1, k, l)$ angenommen wird.

Aufgabe 72. Wie werden diese Resultate abgeleitet?

Aufgabe 73. Kommen unter den Kristallen des regulären Systems wirklich vom Granatoeder verschiedene halbreguläre Polyeder vor?

[Nur noch das Pyramidenhexaeder kann halbregulär sein; denn in der Natur sind die Verhältnisse k, l niemals irrational.]

Bei der Anwendung der *Hemiedrie* auf die Diamantoide kann man in dreifacher Weise verfahren. Wird allgemein

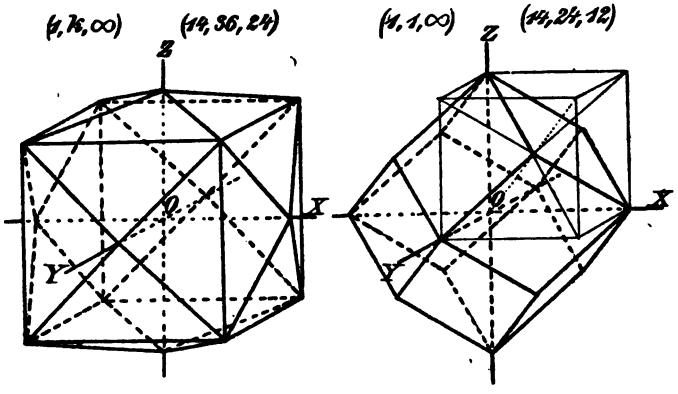


Fig. 58.

durch das Symbol $(k, -1, l)$ das Dreieck angewiesen, dessen Ebene von den Achsen OX, OY, OZ die Stücke k, -1, l abschneidet, so kann man die Dreiecke verschwinden lassen, deren Symbole

1. entweder eine ungerade Zahl von negativen Zeichen enthalten,

2. oder mit Hinsicht auf die Reihenfolge der Segmente $1, k, l$ die negativen Glieder der Determinante $(1, k, l)$ bilden,

3. oder aber eine ungerade oder eine gerade Zahl von negativen Zeichen enthalten, je nachdem das Symbol ein negatives oder positives Glied der Determinante $(1, k, l)$ ist. Allein, um nicht zu weitläufig zu werden, beschränken wir uns hier auf die einfachste Methode aus regelmäßig gebauten Polyedern Körper mit der halben Flächenzahl abzuleiten, weil diese allein zu halbregulären Polyedern führen kann; sie besteht bekanntlich darin, daß man entweder die

um einen Eckpunkt herum liegenden Flächen oder die Flächengruppen der Oktanten abwechselnd unterdrückt und ausbreitet. So ist das Tetraeder die halbflächige oder hemiedrische Form des Oktaeders und die halbeckige oder „hemigone" Form des Hexaeders, und leitet man mittels Hemiedrie um die vierkantigen Eckpunkte herum aus dem Pyramidenhexaeder das Pyritoeder (Fig. 59) und mittels Oktantenhemiedrie aus Pyramidenoktaeder, Leuzitoeder und Diamantoid Triakistetraeder, Pyramidentetraeder und Hexakistetraeder (Fig. 60) ab; von diesen vier neuen Formen kann nur das Pyramidentetraeder (für $k = 3$) halbregulär werden.

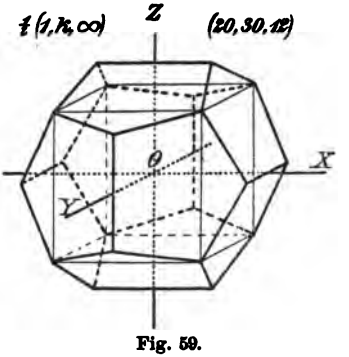


Fig. 59.

Wie in der vorhergehenden Nummer schon bemerkt wurde, stehen die gleichflächigen und die gleicheckigen halbregulären Polyeder einander polar-reziprok gegenüber. Wirk-

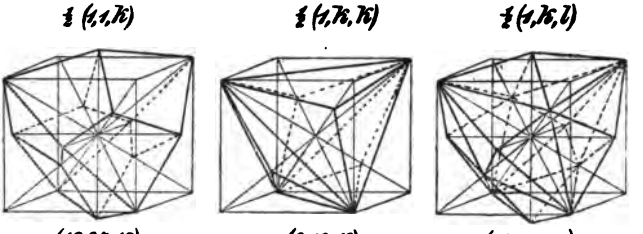


Fig. 60.

lich erkennt man in den Bildern der Fälle 1, 2, 4, 7, 8, 13 der Fig. 55, welche auf Seite 194 wiederholt wird, der Reihe nach die dualistischen Gegenbilder von Pyramidentetraeder, Pyramidenoktaeder, Pyramidenhexaeder, Leuzitoeder, Granatoeder, Diamantoid.

Aufgabe 74. Welche Form steht dem neunten der Archimedischen Polyeder dual gegenüber?

[Ein von 30 Rhomben begrenztes Polyeder; man vergleiche eine kleine Schrift von F. J. Vaes (Leiden, Sythoff, 1900).]

Die Verwandtschaft (1, 2) zwischen den Seitenflächen der hemiedrischen Formen und den Paaren paralleler Seitenflächen der Polyeder, aus welchen sie herstammen, ist als *hemiedrischer Isomorphismus* bekannt.

Bekanntlich treten an den Kristallen oft zwei oder drei der Formen des regulären Systems auf, wobei die Ecken oder die Kanten oder Ecken und Kanten der vorherrschenden Form durch die Flächen von Nebenformen abgestumpft

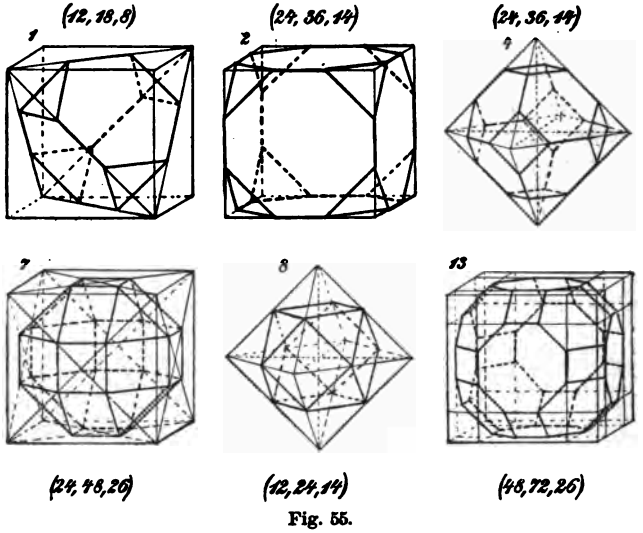


Fig. 55.

werden. Von den 15 gleicheckigen halbregulären Polyedern lassen die neun folgenden eine solche Deutung zu:

1. das linke Tetraeder stumpft die Ecken des rechten ab (Fig. 55_1),
2. das Oktaeder stumpft die Ecken des Hexaeders ab (Fig. 55_2),
3. das Ikosaeder stumpft die Ecken des Dodekaeders ab,
4. das Hexaeder stumpft die Ecken des Oktaeders ab (Fig. 55_4),
6. das Dodekaeder stumpft die Ecken des Ikosaeders ab,

7. Hexaeder, Oktaeder und Granatoeder im Gleichgewicht (Fig. 55_7),
8. Hexaeder und Oktaeder im Gleichgewicht (Fig. 55_8),
9. Dodekaeder und Ikosaeder im Gleichgewicht,
13. das Granatoeder stumpft die Ecken der Kombination 8 ab (Fig. 55_{13}).

63. Die räumlichen Netze. Aus der Tabelle am Schlusse der Nr. 52 läßt sich ablesen, daß von den regulären Polyedern nur das Hexaeder ein räumliches Netz zu bilden imstande ist. Für sonstige regelmäßig gebildete Raumausfüllungen haben wir uns also nach anderen Polyedern umzusehen.

Weil wir der Überfülle des schönen Materials wegen genötigt sind uns sehr zu beschränken, so erwähnen wir neben dieser von selbst einleuchtenden Raumausfüllung durch Hexaeder nur noch zwei andere, welche durch eine einfache Umbildung aus ihr hervorgehen und, wie wir in den nächsten Paragraphen sehen werden, mit ihr die Eigenschaft teilen, sich unmittelbar auf Räume höherer Dimensionenzahl übertragen zu lassen, nämlich die Raumausfüllungen durch Granatoeder und durch die Kombination von Hexaeder und Oktaeder, wobei (Fig. 55_4) in den Oktaederflächen reguläre Sechsecke auftreten.

Das Granatoedernetz. Das Granatoedernetz entsteht, wenn man sich das Hexaedernetz aus abwechselnd weißen und schwarzen Hexaedern zusammengesetzt denkt — wie im Damenbrett die Quadrate —, jedes der weißen Hexaeder in sechs kongruente Pyramiden mit dem Hexaedermittelpunkte als gemeinschaftlichem Scheitel zerlegt und jede dieser weißen Pyramiden vereinigt mit demjenigen schwarzen Hexaeder, welchem sie sich mit ihrer Grundfläche anschmiegt.

Das Netz der Vierzehnflache. Untersuchungen von Lord Kelvin („On homogeneous division of space", *Nature*, 8. und 15. März, 1894) verfolgend, fand der Verfasser, daß sich die Raumausfüllung durch Hexaeder noch in anderer Weise regelmäßig umbilden läßt. Denkt man sich (Fig. 61) jedes Hexaeder AB einer solchen Raumausfüllung durch Ebenen durch den Mittelpunkt O parallel zu den Seitenflächen in acht kongruente Hexaeder zerschnitten, und bringt sodann in jedem dieser acht Teile senkrecht zu ihren in O zusammentretenden Körperdiagonalen die diese hälftenden

Ebenen an, wie dies in den Figuren rechts für zwei der acht Teile ersichtlich ist, so bilden die acht Teile um O in jedem der ursprünglichen Hexaeder ein halbreguläres Polyeder (24, 36, 14), und desgleichen die sich um irgend einen Eck-

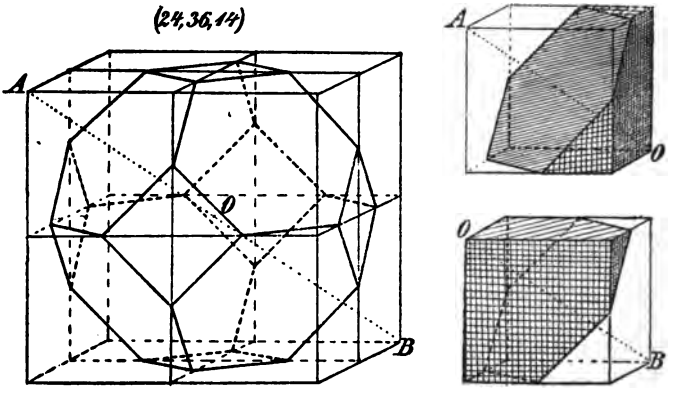


Fig. 61.

punkt A oder B des ursprünglichen Netzes lagernden acht Teile um diesen Punkt herum; zur leichteren Versinnlichung kann man sich dabei dann, dem Damenbrett ähnlich, die um die Mittelpunkte O liegenden Polyeder schwarz, die um die Eckpunkte A, B, ... liegenden Polyeder weiß denken.

Aufgabe 75. Berechne die Kantenwinkel des Granatoeders und des Vierzehnflachs.

[Man findet beim Granatoeder 120^0. Ist ferner ω_1 der Winkel zwischen zwei Oktaederflächen, ω_2 der Winkel zwischen Oktaeder- und Hexaederfläche, so findet man beim Vierzehnflach

$$\cos\omega_1 = -\tfrac{1}{3}, \quad \cos\omega_2 = -\tfrac{1}{3}\sqrt{3}, \quad \cos 2\omega_2 = -\tfrac{1}{3},$$
$$\sin\omega_1 = \tfrac{2}{3}\sqrt{2}, \quad \sin\omega_2 = \tfrac{1}{3}\sqrt{6}, \quad \sin 2\omega_2 = -\tfrac{2}{3}\sqrt{2}$$

und also $\omega_1 + 2\omega_2 = 360^0$.]

§ 7. Reguläre Zelle.

64. Die überhaupt möglichen regulären Zelle. Ein vierdimensionales Polytop mit e Ecken, k Kanten, f Flächen und r Räumen, oder wie wir kurz sagen wollen ein Zell

(e, k, f, r), wird regulär genannt, wenn es von kongruenten regulären Polyedern derart begrenzt wird, daß in den Ecken kongruente reguläre Vielkante entstehen; es möge durch das Symbol $(e, k, f, r; p, q)_s$ gekennzeichnet werden, wo s die Flächenzahl der begrenzenden Polyeder anzeigt und p und q der Reihe nach angeben, wieviel Grenzräume durch eine Kante und durch eine Ecke gehen. Zwei „benachbarte" Polyeder haben ein reguläres Polygon gemein.

Schneidet man das Zell $(e, k, f, r; p, q)_s$ durch einen in einem Punkte P einer Kante AB auf dieser Kante senkrecht stehenden Raum R_3, so werden die um AB liegenden Grenzräume in p Ebenen geschnitten, welche im R_3 ein reguläres p-Kant einschließen; die von den aufeinanderfolgenden Kanten dieses p-Kants gebildeten Winkel sind die Kantenwinkel der um AB lagernden Polyeder des Zelles. Mittels der Eigenschaft, daß die Summe der Seitenwinkel eines konvexen dreidimensionalen Vielkants 360° nicht erreichen kann, ergibt sich also — vergleiche die Tabelle von Nr. 52 —, daß es höchstens sechs reguläre Zelle geben kann; denn dieser Bedingung genügen nur die Kombinationen

$s \ldots$	4, 4, 4, 6, 8, 12
$p \ldots$	3, 4, 5, 3, 3, 3

Der nächste Schritt besteht in der Aufsuchung der diesen sechs möglichen Fällen entsprechenden Werte von q. Nennt man allgemein bei irgend einem Polytope die Eckpunkte, welche durch Kanten mit einer bestimmten Ecke verbunden sind, dieser Ecke benachbart, so sind einer Ecke eines Tetraeders, Hexaeders oder Dodekaeders die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks, einer Ecke eines Oktaeders die Ecken eines Quadrates, einer Ecke eines Ikosaeders die Ecken eines regulären Pentagons benachbart. Und ebenso verlangt der Bau eines regulären Zelles, daß einer Ecke die Eckpunkte eines regulären Polyeders benachbart seien, und dieses Polyeder von gleichseitigen Dreiecken oder von Quadraten begrenzt werde, je nachdem das Zell von Tetraedern, Hexaedern, Dodekaedern oder aber von Oktaedern eingeschlossen wird. Dabei zeigt dann im ersteren dieser zwei Fälle, wo Dreideutigkeit auftritt, der Wert von p weiter den Weg, indem für $p = 3, 4, 5$ der Reihe nach das Tetraeder, das Oktaeder, das Ikosaeder gewählt werden

muß. So bilden im Falle $s = 4$, $p = 5$ die dem Eckpunkte A gegenüberliegenden gleichseitigen Dreiecke der in A zusammentretenden Tetraeder ein Ikosaeder, weil bei diesem durch irgend eine Ecke B fünf Seitenflächen gehen, was zur Folge hat, daß beim Zelle durch die Kante AB fünf Seitenräume gehen; also findet man $q = 20$, obgleich dem Punkte A zwölf Punkte B benachbart sind. So ergibt sich die Ergänzung obiger Tabelle mit einer dritten Zeile

$$q \ldots \| \; 4,\ 8,\ 20,\ 4,\ 6,\ 4.$$

Weiter können die *Verhältnisse* der Zahlen e, k, f, r der sechs regulären Zelle noch mit ganz elementaren Hilfsmitteln bestimmt werden. Ist das begrenzende Polyeder ein (e', k', f'), — wo also $f' = s$ ist —, so hat man

$$qe = re', \quad pk = rk', \quad 2f = rf',$$

weil die *beiden* Seiten dieser ersten, zweiten, dritten Beziehung der Reihe nach die Zahl der Inzidenzen einer Ecke, einer Kante, einer Fläche mit einem Seitenraume angeben. Also hat man

$$e : k : f : r = \frac{e'}{q} : \frac{k'}{p} : \frac{f'}{2} : 1;$$

hieraus folgt für die sechs Zelle in der oben gegebenen Reihenfolge

	p	q	e'	k'	$f'=s$	$e : k : f : r$
1	3	4	4	6	4	1 : 2 : 2 : 1
2	4	8	4	6	4	1 : 3 : 4 : 2
3	5	20	4	6	4	1 : 6 : 10 : 5
4	3	4	8	12	6	2 : 4 : 3 : 1
5	3	6	6	12	8	1 : 4 : 4 : 1
6	3	4	20	30	12	5 : 10 : 6 : 1

Hiermit sind für die sechs regulären Zelle alle bestimmenden Größen bis auf eine, den absoluten Wert irgend einer der vier Zahlen e, k, f, r gefunden. Und hier bringt der noch nicht angewendete Eulersche Satz keine Rettung, weil derselbe homogen ist in e, k, f, r. Bevor wir die absoluten Werte dieser Größen auf weniger einfachen

Wegen bestimmen, erwähnen wir die vier Kugelräume, welche in einfacher Weise mit den regulären Zellen in Verbindung stehen.

Die durch einen Eckpunkt gehenden Kanten eines regulären Zelles bilden ein reguläres Vielkant und haben gleiche Länge; deshalb werden die diese Kanten senkrecht halbierenden Räume ebenfalls ein reguläres Vielkant bilden und also durch den nämlichen Punkt O gehen, welcher von allen e Ecken gleich weit entfernt ist und diese Eigenschaft ebenfalls besitzt in bezug auf die k Kantenmitten, die f Flächen- und die r Grenzraummittelpunkte. Also ist O der gemeinschaftliche Mittelpunkt eines Umkugelraumes K_u durch die Ecken, zweier Ankugelräume K_a, K_b, welche respektive die Kanten und Seitenflächen in ihren Mittelpunkten berühren, und eines Inkugelraumes K_i, welcher die Grenzräume in ihren Mittelpunkten berührt. Und wenn r_u, r_a, r_b, r_i die Radien dieser Kugelräume, r'_u, r'_a, r'_i die Radien von Umkugel, Ankugel, Inkugel der begrenzenden Polyeder sind, so ist

$$r_u^2 = r_i^2 + r_u'^2, \quad r_a^2 = r_i^2 + r_a'^2, \quad r_b^2 = r_i^2 + r_i'^2,$$

welche Gleichungen, weil r'_u, r'_a, r'_i bekannt sind, erlauben r_a, r_b, r_i zu berechnen, wenn r_u gefunden ist.

Die Berechnung des Radius r_u des Umkugelraumes bietet keine Schwierigkeiten. Ist in einer senkrechten Projektion auf die Ebene durch eine Kante AB und den Mittelpunkt O das Lot BM im rechtwinkligen Dreiecke ABA' mit O als Mitte der Hypotenuse AA' die Projektion des Raumes, welcher die dem Punkte A benachbarten Eckpunkte B enthält, so hat man zunächst beim dritten der sechs Fälle $BM = r'_u{}^{(20)}$, d. h. den Umradius des regulären Ikosaeders, sodann beim letzten der sechs Fälle $BM = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\, r'_u{}^{(4)}$, d. h. den Umradius des regulären Tetraeders mit der Kantenlänge $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$, und nun berechnet man ganz wie in Nr. 52 im Falle des dreidimensionalen Raumes aus $AB = 1$ und BM nacheinander $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2}$ und $2\,AO = \dfrac{AB^2}{AM}$, usw. So findet man die Werte der folgenden Tabelle, wo sich die vorgefügten Buchstaben auf die später einzuführenden Namen der sechs Zelle beziehen.

	AM	r_u	r_a	r_b	r_i
F	$\frac{1}{4}\sqrt{10}$	$\frac{1}{5}\sqrt{10}$	$\frac{1}{10}\sqrt{15}$	$\frac{1}{15}\sqrt{15}$	$\frac{1}{20}\sqrt{10}$
Sn	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}\sqrt{6}$	$\frac{1}{4}\sqrt{2}$
St	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$	$\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{6}(3+\sqrt{5})\sqrt{3}$	$\frac{1}{4}(2+\sqrt{5})\sqrt{2}$
A	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
V	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{6}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
H	$\frac{1}{8}(3-\sqrt{5})\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}(2+\sqrt{5})\sqrt{3}$	$\frac{1}{10}\sqrt{10(65+29\sqrt{5})}$	$\frac{1}{4}(7+3\sqrt{5})$

65. Teilung der regulären Zelle in zwei Gruppen. Früher bemerkten wir, daß die fünf regulären Polyeder sich in zwei ihrem Charakter nach ganz verschiedene Gruppen trennen lassen, die Gruppe der einfacheren Polyeder (Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder) und die Gruppe der komplizierteren Polyeder (Dodekaeder, Ikosaeder), welche sich — vergleiche die Tabelle von Nr. 52 — unter anderem dadurch voneinander unterscheiden, daß die Radien der drei Kugeln sich bei den Polyedern der ersten Gruppe mit Hilfe eines einzigen Wurzelzeichens, bei den Polyedern der zweiten Gruppe mit Hilfe von zwei Wurzelzeichen in der Kantenlänge ausdrücken. Das nämliche Wurzelkriterium legen wir nun einer Einteilung der sechs regulären Zelle in zwei Gruppen zugrunde; dabei gehören dann — vergleiche die letzte Tabelle der vorhergehenden Nummer — die Fälle 1, 2, 4, 5 der ersten, die Fälle 3, 6 der zweiten Gruppe an. Und nun ergibt sich, daß diese scheinbar gekünstelte Einteilung insofern zweckmäßig ist, als die Zelle der ersten Gruppe wieder die einfacheren, die der zweiten die komplizierteren bilden. So kann die Bestimmung der absoluten Werte der kennzeichnenden Zahlen nur bei den Zellen der ersten Gruppe mit elementaren Hilfsmitteln geschehen.

Es versteht sich, daß das Polytop, welches einem regulären Zell (e, k, f, r) entspricht in einer Orthogonalitätsverwandtschaft (I 98) mit dem Mittelpunkte des Zelles als Mittelpunkt, selbst ein reguläres Zell (e', k', f', r') sein muß, und daß dabei die Beziehungen

$$e' = r, \quad k' = f, \quad f' = k, \quad r' = e$$

obwalten. Also teilen sich die regulären Zelle andererseits in Zelle, die sich selbst, und Zellenpaare, dessen Konstituenten einander entsprechen. So stehen — vergleiche die vorletzte Tabelle der vorhergehenden Nummer — die zwei Fälle 3 und 6 der komplizierteren Gruppe einander dualistisch gegenüber und enthält die einfachere Gruppe in den Fällen 1 und 5 zwei sich selbst, in den Fällen 2 und 4 ein Paar einander entsprechender Zelle. Und zwischen den Fällen 1 und 5 der sich selbst entsprechenden Zelle ist dann weiter dieser Unterschied hervorzuheben, daß beim ersteren $AM = r_u + r_i$, beim letzteren $AM < r_u$ ist. Denn hieraus folgt, daß beim ersteren die Gegenelemente ungleichartig sein müssen, während dies beim letzteren nicht der Fall zu sein braucht.

66. Die kennzeichnenden Zahlen der vier einfacheren Zelle. Errichtet man im R_4 auf den Raum R_3 eines Tetraeders $A_1 A_2 A_3 A_4$ mit der Einheit als Kantenlänge im Mittelpunkte M ein Lot MA_5 von der Länge x, so ist $\sqrt{MA_1^2 + MA_5^2} = \sqrt{r_u^2 + x^2} = \sqrt{\frac{3}{8} + x^2}$ die Entfernung des Endpunktes A_5 von den vier Ecken A des Tetraeders. Diese Entfernung wird also ebenfalls die Einheit, wenn $x = \frac{1}{4}\sqrt{10}$ angenommen wird. Es bildet dann der neue Punkt A_5 mit den vier Eckpunkten A des Tetraeders die Eckpunkte eines Simplex $S(5)$ mit zehn Kanten gleicher Länge, welches sich als ein reguläres *Fünfzell* erweist. Das entsprechende Symbol (64,) ist $(5, 10, 10, 5; 3, 4)_4$.

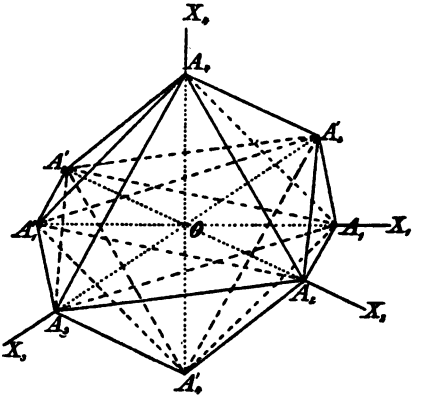


Fig. 62.

Trägt man auf die Achsen $O(X_1, X_2, X_3, X_4)$ eines rechtwinkligen Koordinatensystems (Fig. 62) im R_4 vom Ursprunge O aus nach beiden Seiten hin gleiche Segmente ab und verbindet in jedem der sechzehn Teile, in welche die vier Koordinatenräume den vierdimensionalen Raum zerlegen, die vier auf den Halbstrahlen dieses Teiles

liegenden Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 zu je zwei, zu je drei und zu vier durch sechs Kanten, vier gleichseitige Dreiecke und ein reguläres Tetraeder, so entsteht ein von sechzehn kongruenten Tetraedern begrenztes reguläres Zell, das *Sechzehnzell*, mit dem Symbole $(8, 24, 32, 16; 4, 8)_4$.

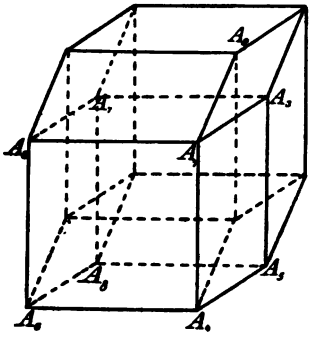


Fig. 63.

Wird ein Hexaeder (Fig. 63) mit den acht Ecken $A_1, \ldots, A_8$ und der Einheit als Kantenlänge in einem R_4 durch seinen R_3 in der Richtung $A_1 A_9$ senkrecht zu diesem R_3 um eine Strecke $A_1 A_9$ gleich der Einheit parallel zu sich selbst verschoben, so durchläuft das Hexaeder ein Stück des vierdimensionalen Raumes, das reguläre *Achtzell* über der Längeneinheit, welches schon als Maßeinheit des vierdimensionalen Raumes gewürdigt worden ist [81]. Das entsprechende Symbol ist $(16, 32, 24, 8; 3, 4)_6$.

Errichtet man im R_4 auf den Raum R_3 eines Hexaeders (Fig. 64) mit den Eckpunkten $A_1, \ldots, A_8$ und der Einheit als Kantenlänge im Mittelpunkte M ein Lot MA von der Länge $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, so hat der Endpunkt A dieses Lotes von sämt-

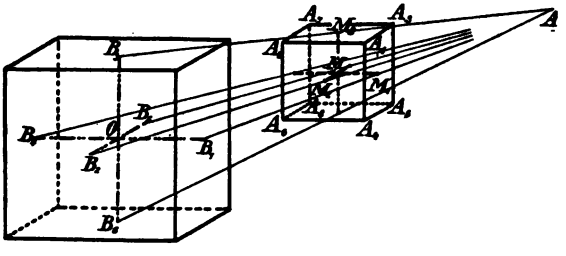


Fig. 64.

lichen acht Ecken A_i des Hexaeders die Entfernung eins, und es bildet dieser Punkt A mit dem irgend einer Seitenfläche des Hexaeders angehörigen Eckpunktequadrupel die fünf Eckpunkte eines halben Oktaeders. Ergänzt man die

halben Oktaeder den Eckpunkten nach zu ganzen Oktaedern, so erhält man bei jedem der sechs halben Oktaeder nur einen neuen Eckpunkt und also im ganzen sechs neue Eckpunkte. Weil diese sechs neuen Punkte B_i offenbar gefunden werden, indem man die von A nach den Oktaedermittelpunkten, d. h. nach den Mittelpunkten M_i der Seitenflächen des Hexaeders führenden Geradensegmente AM_i von A aus verdoppelt, so bilden sie die Eckpunkte des Oktaeders mit der Kantenlänge $\sqrt{2}$, welches durch Multiplikation des Oktaeders der Seitenmittelpunkte M_i von A aus mit zwei entsteht und sich also befindet im zum Hexaederraume parallelen Raume, welcher der Ort der Punkte P ist, deren Abstände AP von A durch den Hexaederraum gehälftet werden. Also schneidet dieser neue Raum die Achse AM im Zellmittelpunkte O; denn die von A und diesem Schnittpunkte begrenzte Strecke hat die Länge $\sqrt{2}$ des Umradius, weil sie doppelt so groß ist wie AM. Deshalb ist dieser neue Raum durch O ein das Zell halbierender Symmetrieraum. Weil nämlich die sechs Punkte B paarweise symmetrisch liegen in bezug auf O, so muß sich jedem der Punkte A ebenfalls ein in bezug auf O symmetrisch liegender Punkt A' zur Seite stellen. Allein dadurch erhält man gerade die Spiegelbilder der neun Punkte A und A_i in Hinsicht auf den Raum der Punkte B_i; denn, während der zu O symmetrische Punkt A' von A das Spiegelbild von A ist, sind die zu O symmetrischen Punkte A_1', A_8' von zwei Endpunkten A_1, A_8 einer Körperdiagonale des der Ecke A benachbarten Hexaeders als A_8', A_1' die Spiegelbilder von A_1, A_8. Also erhält man im ganzen

$$1 + 8 + 6 + 8 + 1$$

Zellecken und man findet das reguläre *Vierundzwanzigzell* mit dem Symbole $(24, 96, 96, 24; 3, 6)_8$.

In dieser Erzeugung der vier einfacheren regulären Zelle, die künftighin kurz als Z_5, Z_{16}, Z_8, Z_{24} bezeichnet werden sollen, erkennt man der Reihe nach die vierdimensionale Verallgemeinerung der Erzeugung des Tetraeders aus dem gleichseitigen Dreiecke, der kristallographischen Erzeugung des Oktaeders, der Erzeugung des Hexaeders durch Bewegung eines Quadrates, und des Aufbaues eines Oktaeders von einem Eckpunkte aus.

67. Die Koordinaten der Eckpunkte der Zelle Z_5, Z_8, Z_{16}, Z_{24}. Wir behandeln jedes der vier obigen einfacheren Zelle für sich.

Das Fünfzell. Nimmt man, in Übereinstimmung mit der Erzeugungsweise, die drei Hauptstrahlen OK_0 eines der fünf begrenzenden Tetraeder und die im Schnittpunkte O dieser Geraden zum Raume dieses Tetraeders senkrechte Gerade als Koordinatenachsen $O(X_1, X_2, X_3)$ und OX_4 an, so findet man für die Koordinaten (x_1, x_2, x_3, x_4) der fünf Eckpunkte die Wertsysteme

$$(-a, a, a, 0),\ (a, -a, a, 0),\ (a, a, -a, 0),$$
$$(-a, -a, -a, 0),\ (0, 0, 0, b),$$

wo a für $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ und b für $\frac{1}{4}\sqrt{10}$ steht. In bezug auf parallele Achsen durch den Zellmittelpunkt O' geht dies über in

$$(-a, a, a, -\tfrac{1}{5}b),\ (a, -a, a, -\tfrac{1}{5}b),\ (a, a, -a, -\tfrac{1}{5}b),$$
$$(-a, -a, -a, -\tfrac{1}{5}b),\ (0, 0, 0, \tfrac{4}{5}b).$$

Die abweichende Form des fünften Systems ist hier offenbar eine Folge der besonderen Wahl des Koordinatensystems; nur wenn man homogene Koordinaten anwendet, findet man in bezug auf das Fünfzell selbst als Koordinatensimplex die ganz regelmäßigen Systeme

$$(1, 0, 0, 0, 0),\ (0, 1, 0, 0, 0),\ (0, 0, 1, 0, 0),$$
$$(0, 0, 0, 1, 0),\ (0, 0, 0, 0, 1).$$

Das Achtzell. In bezug auf das rechtwinklige System der zu den Kanten parallelen Achsen durch den Zellmittelpunkt O ergeben sich die Koordinaten der sechzehn Eckpunkte in der allgemeinen Form

$$(\pm a, \pm a, \pm a, \pm a),$$

wo a für $\frac{1}{2}$ steht und alle Zeichenkombinationen zu betrachten sind. Liegt die Gleichung

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 + x_4\xi_4 + 1 = 0$$

der vereinigten Lage von Punkt und Raum (I 81) einem Systeme von Raumkoordinaten $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ zugrunde, so erscheinen die Koordinatenwerte der acht Grenzräume mit den Gleichungen $x_i = \pm\frac{1}{2}$ in der Form

$$(\pm 2, 0, 0, 0),\ (0, \pm 2, 0, 0),\ (0, 0, \pm 2, 0),$$
$$(0, 0, 0, \pm 2).$$

Das Sechzehnzell. In bezug auf das System der vier bei der Erzeugung benutzten Achsen sind die Koordinaten der acht Eckpunkte

$$(\pm a, 0, 0, 0), \quad (0, \pm a, 0, 0), \quad (0, 0, \pm a, 0), \quad (0, 0, 0, \pm a),$$

wo a für $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ steht, und ihnen stellen sich die Koordinaten

$$(\pm b, \pm b, \pm b, \pm b)$$

der sechzehn Grenzräume für $b = \sqrt{2}$ zur Seite.

Das Vierundzwanzigzell. In bezug auf das oben gefundene System der vier Achsen OB_1, OB_2, OB_3, OA (Fig. 64) teilen sich die 24 Eckpunkte des Z_{24} unmittelbar in zwei Gruppen, deren eine acht auf den Achsen liegende Punkte, die sechs Punkte B_i und die zwei Punkte A, A', die andere sechzehn nicht in den Koordinatenräumen liegende Punkte, die acht Punkte A_i und die acht Punkte A_i', enthält. Die Koordinaten der Punkte der ersten Gruppe sind

$$(\pm a, 0, 0, 0), \quad (0, \pm a, 0, 0), \quad (0, 0, \pm a, 0), \quad (0, 0, 0, \pm a),$$

die der Punkte der zweiten Gruppe

$$(\pm b, \pm b, \pm b, \pm b),$$

für $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$; deshalb bilden die Punkte der ersten Gruppe die Ecken eines Z_{16}, die der zweiten die Ecken eines Z_8, oder aber mit Angabe der Maßverhältnisse, wenn allgemein $Z_s^{(k)}$ das von regulären s-Flachen mit der Kantenlänge k begrenzte reguläre Zell bezeichnet:

„Das $Z_{24}^{(1)}$ zerfällt nach den Eckpunkten in ein $Z_{16}^{(\sqrt{2})}$ und ein $Z_8^{(1)}$“.

Wir suchen weiter die Koordinaten $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ der 24 begrenzenden Räume. Für $a = \frac{1}{2}$ sind

$$\left.\begin{matrix}(0, 0, 0, 2a)\\ (0, 0, 2a, 0)\end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix}(a, a, a, a)\\ (-a, -a, a, a)\end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix}(-a, a, a, a)\\ (a, -a, a, a)\end{matrix}\right\}$$

die Koordinaten der drei Gegeneckenpaare (A, B_3), (A_1, A_7), (A_2, A_8) eines begrenzenden Oktaeders (Fig. 64). Also ist

$x_3 + x_4 = 2a$ die Gleichung und sind $\left(0, 0, -\frac{1}{2a}, -\frac{1}{2a}\right)$ die Koordinaten ξ_i des dieses Oktaeder tragenden Raumes. So findet man die 24 Systeme

$$(\pm 1, \pm 1, 0, 0), \quad (\pm 1, 0, \pm 1, 0),$$
$$(0, 0, \pm 1, \pm 1), \quad (0, \pm 1, 0, \pm 1),$$
$$(\pm 1, 0, 0, \pm 1),$$
$$(0, \pm 1, \pm 1, 0).$$

68. Die Schlegelschen Diagramme der Zelle Z_5, Z_8, Z_{16}, Z_{24}. Projiziert man die gefundenen regulären Zelle auf einen Grenzraum aus einem Punkte der Mittelpunktsnormale dieses Grenzraums, welcher außerhalb des Zelles in genügender Nähe liegt [9], so wird das in diesem Grenzraum liegende Polyeder auf regelmäßige Weise so in untereinander isomorphe Teile zerlegt, daß in jedem neuen Punkte und um jede neue Kante q und p, in jedem Eckpunkte und an jeder Kante des Grenzraumes $q-1$ und $p-1$ dieser Teile liegen. Umgekehrt beweist die Möglichkeit einer solchen Zerlegung zunächst die Möglichkeit der mit den regulären Zellen isomorphen Zellgruppen, sodann durch Mitbetrachtung der Maßverhältnisse die Möglichkeit dieser Zelle selbst.

Nach den Anweisungen Schlegels sind die Raumdiagramme der regulären Zelle aus Messingdraht und Seidenfäden in schöner Weise hergestellt worden vom L. Brillschen Verlag, Darmstadt (jetzt M. Schilling, Halle a. S.). Wir

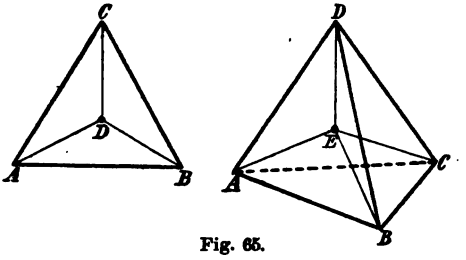


Fig. 65.

geben sie hier in Parallelperspektive wieder, dabei das Messing durch starke, die Seide durch schwache Linien andeutend. Außerdem stellen wir zur Erläuterung dieser Bilder die ihnen im Bau entsprechenden Diagramme der regulären Polyeder zur Seite.

Das Diagramm des *Fünfzelles* (Fig. 65) entsteht, wenn man den Mittelpunkt eines metallenen Tetraedergerüstes durch Fäden mit den Eckpunkten verbindet; dabei muß man sich dann das Tetraeder mittels sechs Dreiecke in vier Vierflache zerlegt denken, welche mit dem ursprünglichen Tetraeder die Projektionen der fünf begrenzenden Tetraeder des Zelles sind.

Das Diagramm des *Achtzelles* (Fig. 66) wird erhalten, wenn man zwei metallene Hexaedergerüste von ungleicher Größe so um einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt aufstellt, daß die Körperdiagonalen zusammenfallen, und nun die an der nämlichen Seite des Mittelpunktes auf

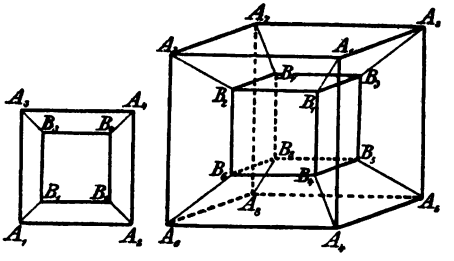


Fig. 66.

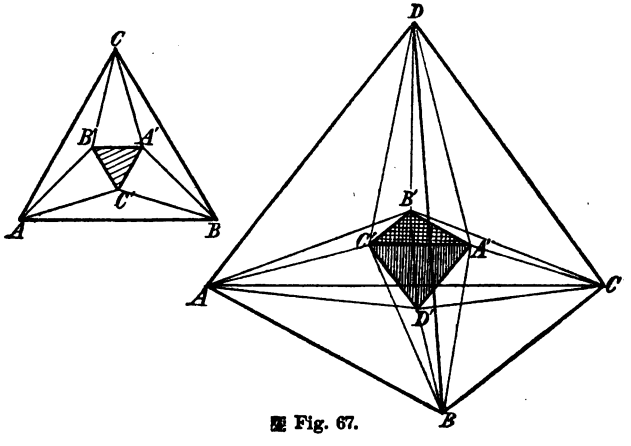


Fig. 67.

der nämlichen Diagonale liegenden Ecken durch Fäden verbindet. Es werden hier die Projektionen der acht begrenzenden Hexaeder von zwei Hexaedern und sechs regelmäßigen vierseitigen Pyramidenstümpfen gebildet.

Das Diagramm des *Sechzehnzelles* (Fig. 67) besteht aus

zwei metallenen Tetraedergerüsten $ABCD$, $A'B'C'D'$ ungleicher Größe, welche den nämlichen Mittelpunkt und entgegengesetzt parallele gleichnamige Kanten haben, und Fäden, welche die ungleichnamigen Ecken dieser Tetraeder verbinden. Hierbei sind die vier Ecken der Projektion irgend eines der sechzehn begrenzenden Tetraeder immer mit den Buchstaben A, B, C, D behaftet; nur trägt das Buchstabenquadrupel der Reihe nach bei 1, 4, 6, 4, 1 dieser Projektionen 0, 1, 2, 3, 4 Striche nach dem Schema

		$A'B'CD$		
	$A'BCD$	$A'BC'D$	$AB'C'D'$	
$ABCD$	$AB'CD$	$A'BCD'$	$A'BC'D'$	$A'B'C'D'$
	$ABC'D$	$AB'CD'$	$A'B'CD'$	
	$ABCD'$	$AB'C'D'$	$A'B'C'D$	
		$ABC'D'$		

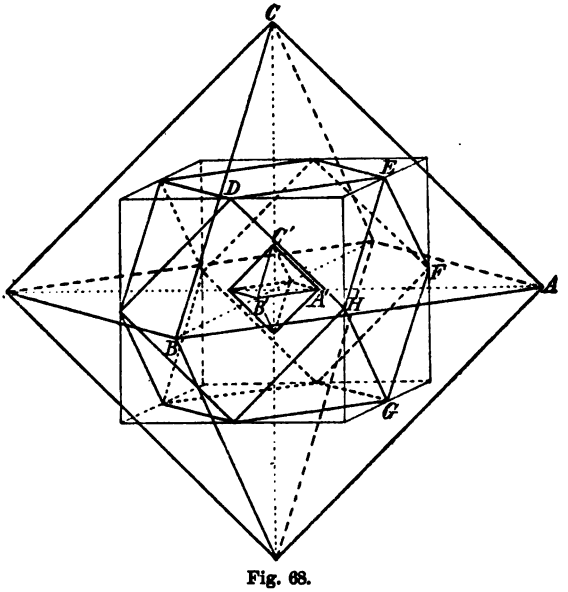


Fig. 68.

Das Diagramm des *Vierundzwanzigzelles* (Fig. 68) konstruiert sich mittels dreier metallener Gerüste, eines großen

Oktaeders, eines mittleren halbregulären Vierzehnflachs und eines kleinen Oktaeders, mit gemeinschaftlichem Mittelpunkte und gemeinschaftlichen Hauptstrahlenrichtungen, indem man für jede der sechs Hexaederflächen des Vierzehnflachs die vier Eckpunkte (E, F, G, H) dieses halbregulären Körpers durch Fäden verbindet mit derjenigen Ecke (A) des großen und derjenigen Ecke (A') des kleinen Oktaeders, welche der betreffenden Hexaederfläche am nächsten liegen; dabei sind dann zu gleicher Zeit die Fäden gespannt, welche in jedem der acht Oktanten die Seiten eines Dreiecks (DEH) in einer Oktaederfläche des Vierzehnflachs mit den Seiten eines Dreiecks (ABC) des großen oder ($A'B'C'$) des kleinen Oktaeders zum Gerüste eines mit einem Oktaeder isomorphen Körpers ergänzen. So erkennt man als die Projektionen der 24 begrenzenden Oktaeder 1 großes Oktaeder, 8 Körper (ABC, DEH), 6 Körper (A, $EFGH$, A'), 8 Körper ($A'B'C'$, DEH), 1 kleines Oktaeder.

Aufgabe 76. Das vierte (und fünfte) Diagramm von Figur 43 ist nur dann zentrale Projektion eines regulären Dodekaeders (Ikosaeders), falls zwischen den vier Segmenten MA, MB, MC, MD zwei bestimmte Beziehungen obwalten. Ebenso gibt Figur 68 nur dann die zentrale Projektion eines Vierundzwanzigzelles, falls zwischen den die drei Gerüste bestimmenden Größen eine bestimmte Beziehung auftritt. Man fragt diese Beziehungen abzuleiten.

69. Die kennzeichnenden Zahlen der zwei komplizierteren Zelle. Wie es uns scheinen will, ist die einfachste Bestimmungsweise der Eckpunkteanzahl des dritten von Tetraedern begrenzten regulären Zelles mit der Bestimmung der rechtwinkligen Koordinaten dieser Punkte verbunden; dabei wird die bei der Bestimmung des Umradius verwendete Figur uns gute Dienste leisten.

Ist A ein Eckpunkt des Zelles und O' der Mittelpunkt des Ikosaeders, dessen Eckpunkte die zwölf dem Punkte A benachbarten Eckpunkte des Zelles bilden, so denken wir uns zunächst ein vierdimensionales Koordinatensystem mit O' als Ursprung, drei Ikosaederhauptstrahlen der Gattung $O'K_0$ als Achsen $O'X_1'$, $O'X_2'$, $O'X_3'$ und der Normale $O'A$ in O' zum Ikosaederraum als Achse $O'X_4'$, in bezug auf welches System die Koordinaten von A, vom Zellmittel-

punkte O und von den zwölf Ikosaederecken — vergleiche Nr. 53[d] — der Reihe nach die Werte

x_1'	x_2'	x_3'	x_4'
0	0	0	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$
0	0	0	$-\frac{1}{4}(\sqrt{5}+3)$
0	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0
$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0	$\pm\frac{1}{2}$	0
$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0	0

annehmen. Gehen wir darauf zu einem parallelen Koordinatensysteme mit O als Ursprung über, so finden wir für A und die Ikosaederecken die Koordinaten

x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$
0	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+3)$
$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0	$\pm\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+3)$
$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+3)$

Setzt man nun in Verbindung mit der Ungleichung $AO > AO'$ voraus — um diese Voraussetzung später auf ihre Richtigkeit zu prüfen —, daß einem Eckpunkte ein Eckpunkt diametral gegenüberliegt und daß das Zell in bezug auf jede der vier Koordinatenachsen in derselben Weise aufgebaut ist, so findet man zunächst, daß man durch Einführung des doppelten Zeichens bei der Koordinate x_4 zwei einander gegenüberliegende Gruppen von dreizehn Punkten in Betracht zu ziehen hat, und weiter, daß man mittels Umwechselung der Koordinatenwerte für x_1, x_2, x_3, x_4 —, wobei wie oben immer eine *gerade* Zahl von Vertauschungen zur Anwendung kommt, — das System der 26 Eckpunkte zum Systeme

x_1	x_2	x_3	x_4
$\pm\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$	0	0	0
0	$\pm\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$	0	0
0	0	$\pm\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$	0
0	0	0	$\pm\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$
$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+3)$	0	$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	$\pm\frac{1}{2}$
$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+3)$	$\pm\frac{1}{2}$	0	$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$
$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+3)$	$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	$\pm\frac{1}{2}$	0
0	$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+3)$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$
$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+3)$	$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0
$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+3)$	0	$\pm\frac{1}{2}$
$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+3)$	0
0	$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+3)$	$\pm\frac{1}{2}$
$\pm\frac{1}{2}$	0	$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+3)$	$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$
0	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+3)$
$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0	$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+3)$
$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+3)$

von 104 Eckpunkten ausbreiten kann. Und dann muß untersucht werden, ob dieses neue System von Punkten des nämlichen um O als Mittelpunkt geschlagenen Kugelraums insofern vollkommen ist, daß es in bezug auf jeden der 104 Eckpunkte wieder zwölf in der Einheit der Entfernung liegende benachbarte Punkte enthält. Dazu betrachten wir natürlich einen nicht auf einer Koordinatenachse liegenden Punkt, z. B. den ersten nicht auf einer Achse liegenden Punkt P obiger Tabelle mit den Koordinatenwerten $[\frac{1}{4}(\sqrt{5}+3), 0, \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1), \frac{1}{2}]$, von welchem die folgenden zehn in der Reihenfolge der Tabelle angegebenen Punkte

x_1	x_2	x_3	x_4
$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$	0	0	0
$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+3)$	0	$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+3)$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$
$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+3)$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$
$-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+3)$	$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+3)$	$-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+3)$	0
$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+3)$	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+3)$	$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$
$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+3)$

— und keine anderen Punkte der Tabelle — in der Einheit der Entfernung liegen. Also ist das System der 104 Eckpunkte noch nicht vollkommen. Die einfache Bemerkung, daß die zwei noch fehlenden Punkte mit den zehn oben angegebenen die Eckpunkte eines Ikosaeders bilden sollen, genügt, um alle noch fehlenden Eckpunkte des Zelles zu finden. Es liegt nämlich der Schwerpunkt dieses Ikosaeders auf OP in der Entfernung $OO' = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+3)$ von O; deshalb haben die Koordinaten dieses Schwerpunktes die Werte $[\frac{1}{4}(\sqrt{5}+2), 0, \frac{1}{8}(\sqrt{5}+3), \frac{1}{8}(\sqrt{5}+1)]$, welche durch Multiplikation der entsprechenden Koordinaten des gewählten Punktes P mit $\frac{\frac{1}{4}(\sqrt{5}+3)}{\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$ erhalten werden, und sind die Summen der entsprechenden Koordinaten der zwölf Ikosaederecken also $[3(\sqrt{5}+2), 0, \frac{3}{2}(\sqrt{5}+3), \frac{3}{2}(\sqrt{5}+1)]$. Weil nun die entsprechenden Koordinatensummen für die zehn oben angegebenen Punkte $[\frac{1}{2}(5\sqrt{5}+11), 0, \sqrt{5}+4, \sqrt{5}+1]$ betragen, so kommen den zwei noch fehlenden Ikosaederecken die Koordinatensummen $[\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1), 0, \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1), \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)]$

zu. Und nun liegt der Gedanke ganz nahe, das System der 104 gefundenen Eckpunkte mit den 16 Eckpunkten $[\pm\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1), \pm\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1), \pm\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1), \pm\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)]$ eines im nämlichen Kugelraume beschriebenen Achtzelles zu einem Systeme von 120 Eckpunkten zu ergänzen. Dieses neue System ist nun endlich vollkommen im oben angegebenen Sinne. Denn die neuen Punkte ergänzen die irgend einem Punkte P benachbarten Punkte zu zwölf. Und einem der sechzehn neuen Punkte sind die zwölf Punkte P benachbart, welche innerhalb oder auf der Begrenzung des von ihm bestimmten sechzehnten Teiles $O(X_1 X_2 X_3 X_4)$ des vierdimensionalen Raumes liegen. Deshalb [64] haben die kennzeichnenden Zahlen (e, k, f, r) des untersuchten Zelles die Werte (120, 720, 1200, 600) und ist das Zell ein *Sechshundertzell* Z_{600}, welchem dualistisch ein Zell (600, 1200, 720, 120), d. h. ein von regulären Dodekaedern begrenztes *Hundertzwanzigzell* Z_{120} entspricht.

Aufgabe 77. Worin hat nun die Prüfung der oben rücksichtlich des Baues des Z_{600} aufgestellten Hypothese bestanden?

70. Die verschiedenen Koordinatenstellungen der regulären Zelle. Im allgemeinen werden bei den regulären Zellen vier verschiedene Arten von „Hauptstrahlen" unterschieden, nämlich die Geraden OE_0, OK_0, OF_0, OR_0, welche den Zellmittelpunkt der Reihe nach mit einer Ecke E_0, einer Kantenmitte K_0, einem Flächenmittelpunkte F_0 und dem Mittelpunkte R_0 eines begrenzenden Polyeders verbinden. Dabei wird die Beschränkung „im allgemeinen" durch die Tatsache motiviert, daß beim Fünfzelle nur zwei Arten von Hauptstrahlen auftreten, indem ein Hauptstrahl OE_0 auch ein Hauptstrahl OR_0, ein Hauptstrahl OK_0 auch ein Hauptstrahl OF_0 ist.

‚Ist ein reguläres Zell in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem so aufgestellt, daß die vier Koordinatenachsen gleichnamige Hauptstrahlen des Zelles sind, so spricht man von einer „regulären" Koordinatenstellung des Zelles, oder kurzweg von einer „Koordinatenstellung". Deshalb kommt dem Fünfzelle keine Koordinatenstellung zu. Und jetzt soll gezeigt werden, daß jedes der fünf übrigen regulären Zelle die vier Koordinatenstellungen OE_0, OK_0, OF_0, OR_0 zuläßt.

Achtzell und *Sechzehnzell.* In Nr. 67 ist das Z_8 in Koordinatenstellung OR_0, das Z_{16} in Koordinatenstellung OE_0 gegeben. Zur Ableitung der übrigen Stellungen betrachten wir nun die Determinanten

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & a & -a & -a \\ a & -a & a & -a \\ a & -a & -a & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & b & b & b \\ b & 0 & -b & b \\ b & b & 0 & -b \\ b & -b & b & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & c & c \\ 0 & 0 & c & -c \\ c & c & 0 & 0 \\ c & -c & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

mit der gemeinschaftlichen Eigenschaft, daß für irgend zwei Zeilen die Summe der Produkte einander entsprechender Elemente verschwindet. Für $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $c = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ sind diese Zeilenquadrupel die Cosinus der Winkel, welche die Achsen von bestimmten neuen rechtwinkligen Koordinatensystemen mit den alten Achsen bilden; für $a = b = c = \frac{1}{2}$ sind sie die Koordinaten von vier Punkten E_0, K_0, F_0 von $Z_8^{(1)}$ und für $a = \frac{1}{8}\sqrt{2}$, $b = \frac{1}{8}\sqrt{2}$, $c = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ sind sie die Koordinaten von vier Punkten R_0, F_0, K_0 von $Z_{16}^{(1)}$. Hieraus geht hervor, daß die Transformationsformeln

$$\left.\begin{aligned} 2y_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 2y_2 &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ 2y_3 &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ 2y_4 &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} z_1\sqrt{3} &= \quad\quad x_2 + x_3 + x_4 \\ z_2\sqrt{3} &= x_1 \quad\quad - x_3 + x_4 \\ z_3\sqrt{3} &= x_1 + x_2 \quad\quad - x_4 \\ z_4\sqrt{3} &= x_1 - x_2 + x_3 \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} t_1\sqrt{2} &= \quad\quad x_3 + x_4 \\ t_2\sqrt{2} &= \quad\quad x_3 - x_4 \\ t_3\sqrt{2} &= x_1 + x_2 \\ t_4\sqrt{2} &= x_1 - x_2 \end{aligned}\right\}$$

das Z_8 der Reihe nach in die Koordinatenstellungen E_0, K_0, F_0, und das Z_{16} der Reihe nach in die Koordinatenstellungen R_0, F_0, K_0 überführen. So findet man die Koordinaten der Eckpunkte und Grenzräume von $Z_8^{(1)}$ und $Z_{16}^{(1)}$ in den vier Stellungen; um Raum zu sparen legen wir in die folgende Tabelle nur die Koordinaten der acht Grenzräume von $Z_8^{(1)}$ (siehe die Unterschrift) und die der acht Ecken von $Z_{16}^{(1)}$ (siehe die Überschrift) nieder.

Punktkoordinaten des $Z_{16}^{(1)}$ in

Stellung E_0 $(\frac{1}{2}\sqrt{2})$	Stellung K_0 $(\frac{1}{2})$	Stellung F_0 $(\frac{1}{6}\sqrt{6})$	Stellung R_0 $(\frac{1}{4}\sqrt{2})$
(+0 0 0)	(0 0+ +)	(0 + + +)	(+ + + +)
(0+ 0 0)	(0 0+ −)	(+ 0 − +)	(+ + − −)
(0 0 +0)	(+ +0 0)	(+ + 0 −)	(+ − + −)
(0 0 0+)	(+ −0 0)	(+ − + 0)	(+ − − +)
(0 0 0−)	(− +0 0)	(− + − 0)	(− + + −)
(0 0 −0)	(− −0 0)	(− − 0 +)	(− + − +)
(0− 0 0)	(0 0− +)	(− 0 + −)	(− − + +)
(−0 0 0)	(0 0− −)	(0 − − −)	(− − − −)
(2) Stellung R_0	$(\sqrt{2})$ Stellung F_0	$(\frac{2}{3}\sqrt{3})$ Stellung K_0	(1) Stellung E_0

Raumkoordinaten des $Z_8^{(1)}$ in

Die eingeklammerten Größen, unten 2, $\sqrt{2}$, $\frac{2}{3}\sqrt{3}$, 1 und oben $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}\sqrt{6}$, $\frac{1}{4}\sqrt{2}$, müssen bei den bezüglichen Kolonnen hinter den Zeichen + und − gedacht werden.

Durch Vergleichung der Koordinaten der Eckpunkte von $Z_{16}^{(1)}$ in der Stellung R_0 mit denen der Eckpunkte von $Z_8^{(1)}$, ebenfalls in der Stellung R_0, für welche früher [67] $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$ gefunden wurde, erhält man folgenden Satz:

„Die Gruppe der 16 Eckpunkte des $Z_8^{(1)}$ zerfällt in zwei Gruppen nicht benachbarter Eckpunkte, die Eckpunkte zweier $Z_{16}^{(\sqrt{2})}$.“

In Verbindung mit einem früher [67] entwickelten Satze gelten nun auch die zwei folgenden:

„Die Gruppe der 24 Eckpunkte des $Z_{24}^{(1)}$ zerfällt in drei Gruppen nicht durch Seitenflächen miteinander verbundener Punktoktupel, die Eckpunkte dreier $Z_{16}^{(\sqrt{2})}$.“

„Die zweimal genommene Gruppe der 24 Eckpunkte des $Z_{24}^{(1)}$ zerfällt in die drei Gruppen der 16 Eckpunkte dreier $Z_8^{(1)}$.“

Vierundzwanzigzell. Das Z_{24} ist in seiner Koordinatenstellung E_0 abgeleitet worden. Um es in die übrigen Stellungen zu bringen benützen wir die drei Determinanten

$$\begin{vmatrix} 3a & -a & -a & -a \\ a & 3a & -a & a \\ a & a & 3a & -a \\ a & -a & a & 3a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2b & -b & -b & 0 \\ b & 2b & 0 & -b \\ b & 0 & 2b & b \\ 0 & b & -b & 2b \end{vmatrix}, \quad - \begin{vmatrix} 0 & 0 & c & c \\ 0 & 0 & c & -c \\ c & c & 0 & 0 \\ c & -c & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

deren Zeilenquadrupel für $a = \frac{1}{6}\sqrt{3}$, $b = \frac{1}{6}\sqrt{6}$, $c = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ Cosinus von Winkeln zwischen neuen rechtwinkligen und den alten Achsen, für $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{2}$ Koordinaten von Punktquadrupeln K_0, F_0, R_0 des $Z_{24}^{(1)}$ darstellen. Mittels der entsprechenden Transformationen

$$\left.\begin{aligned} 2y_1\sqrt{3} &= 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \\ 2y_2\sqrt{3} &= x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \\ 2y_3\sqrt{3} &= x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \\ 2y_4\sqrt{3} &= x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} z_1\sqrt{6} &= 2x_1 - x_2 - x_3 \\ z_2\sqrt{6} &= x_1 + 2x_2 - x_4 \\ z_3\sqrt{6} &= x_1 + 2x_3 + x_4 \\ z_4\sqrt{6} &= x_2 - x_3 + 2x_4 \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} t_1\sqrt{2} &= x_3 + x_4 \\ t_2\sqrt{2} &= x_3 - x_4 \\ t_3\sqrt{2} &= x_1 + x_2 \\ t_4\sqrt{2} &= x_1 - x_2 \end{aligned}\right\}$$

wird das Z_{24} der Reihe nach in die Stellungen K_0, F_0, R_0 gebracht. Wir unterlassen es, die Koordinaten der 24 Eckpunkte und der 24 Grenzräume tabellarisch anzugeben und

bemerken nur, daß in der Stellung R_0 die Koordinaten der Eckpunkte in der einheitlichen Gestalt

$(\pm 1, \pm 1, 0, 0)$, $(\pm 1, 0, \pm 1, 0)$, $(\pm 1, 0, 0, \pm 1)$,
$(0, \pm 1, \pm 1, 0)$, $(0, \pm 1, 0, \pm 1)$, $(0, 0, \pm 1, \pm 1)$

erscheinen, während die der Grenzräume von verschiedener Form sind.

Sechshundertzell und *Hundertzwanzigzell.* Das Z_{600} ist oben in der Koordinatenstellung E_0 gefunden worden; bevor wir von den übrigen Stellungen reden, deuten wir zunächst an, wie aus den 120 Koordinatenquadrupeln des Z_{600} die 600 Koordinatenquadrupel eines Z_{120} abzuleiten sind. Hat man die 120 Eckpunkte des Z_{600} mit Nummern versehen und nun mittels Abstandsbestimmung gefunden, wie diese Eckpunkte sich zu 600 Quadrupeln von Tetraederecken anordnen, so kann man weiter zwei verschiedene Wege einschlagen. Entweder man kann — sich auf die Theorie der Reziprozität stützend — die Gleichungen der 600 Tetraederräume aufstellen, daraus die Koordinaten dieser Räume ableiten und diese als Koordinaten von Punkten betrachten. Oder man kann — und dieser Weg ist der weniger mühsame — die Koordinaten der Schwerpunkte der 600 Tetraeder bestimmen. In beiden Fällen sind die Koordinaten des in Stellung OR_0 auftretenden Z_{120} dann noch mit einem gemeinschaftlichen Faktor zu multiplizieren, wenn man will, daß die Kanten des neuen Z_{120} die Länge eins haben sollen. Es möge genügen hier die Methode angegeben zu haben; für die Ergebnisse selbst sei es uns erlaubt auf eine 1894 von der Amsterdamer Akademie veröffentlichte Schrift „Regelmäßige Schnitte und Projektionen des Hundertzwanzigzelles und Sechshundertzelles“ hinzuweisen. Dieser Schrift entlehnen wir auch die Determinanten

$$\begin{vmatrix} p & q & 0 & 0 \\ -q & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & -q & p \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} r & -s & -s & -s \\ s & r & s & -s \\ s & -s & r & -s \\ s & s & -s & r \end{vmatrix},$$

deren Zeilenquadrupel für $p^2 + q^2 = r^2 + 3s^2 = 1$ wieder Cosinuswerte für neue rechtwinklige Achsensysteme angeben, während die Voraussetzungen

$$\left.\begin{array}{l} p = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+3) \\ q = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} p = \frac{1}{3}(\sqrt{5}+2) \\ q = \frac{1}{6}(\sqrt{5}+1) \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} r = \frac{1}{16}(5\sqrt{5}+11) \\ s = \frac{1}{16}(\sqrt{5}+3) \end{array}\right\}$$

der Reihe nach zu vier Kantenmitten, vier Flächenmittelpunkten und vier Grenztetraedermittelpunkten von Z_{600} führen. So werden dann mittels der entsprechenden Transformationen

$$\left.\begin{array}{rrrr} \lambda y_1 = & 2x_1 & + (\sqrt{5}-1)x_3 & \\ \lambda y_2 = -(\sqrt{5}-1)x_1 & + & 2x_3 & \\ \lambda y_3 = & 2x_3 & + (\sqrt{5}-1)x_4 & \\ \lambda y_4 = -(\sqrt{5}-1)x_3 & + & 2x_4 & \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{rrrr} \mu z_1 = (3+\sqrt{5})x_1 & + & 2x_3 & \\ \mu z_2 = & -2x_1 & + (3+\sqrt{5})x_3 & \\ \mu z_3 = (3+\sqrt{5})x_3 & + & 2x_4 & \\ \mu z_4 = & -2x_3 & + (3+\sqrt{5})x_4 & \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{rrrrr} \nu t_1 = (2+\sqrt{5})x_1 - & x_2 - & x_3 - & x_4 \\ \nu t_2 = x_1 + (2+\sqrt{5})x_2 + & & x_3 - & x_4 \\ \nu t_3 = x_1 - & x_2 + (2+\sqrt{5})x_3 - & & x_4 \\ \nu t_4 = x_1 + & x_2 - & x_3 + (2+\sqrt{5})x_4 & \end{array}\right\},$$

wo $\lambda = \sqrt{10-2\sqrt{5}}$, $\mu = (\sqrt{5}+1)\sqrt{3}$, $\nu = (\sqrt{5}+1)\sqrt{2}$, das Z_{600} in die Stellungen K_0, F_0, R_0, das Z_{120} in die Stellungen F_0, K_0, E_0 übergeführt.

71. Das einfachste Koordinatensystem für Z_{600} und Z_{120}. Das einfachste System von Koordinaten der 120 Eckpunkte des Z_{600} ist wohl von Schläfli gegeben worden[1]); es wird aus der Stellung E_0 abgeleitet mittels der Drehung

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = x_1, \quad y_2\sqrt{10+2\sqrt{5}} = x_2(\sqrt{5}+1) + 2x_3 \\ y_4 = x_4, \quad y_3\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 2x_2 - x_3(\sqrt{5}+1) \end{array}\right\}$$

um die Ebene $O(X_1 X_4)$, welche das Ikosaeder der zwölf dem Punkte $[\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1), 0, 0, 0]$ benachbarten Ecken in der in Nr. 56 angegebenen Weise transformiert. Reduziert man nachher den Umradius auf die Einheit mittels Multiplikation der Koordinaten mit $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, so gibt die Einführung von Polarkoordinaten durch die Formeln

[1]) Man vergleiche die in Nr. 20 schon angeführte Arbeit Schläflis.

$$y_1 = \varrho\cos\varphi, \quad y_2 = \varrho\sin\varphi\cos\psi, \quad y_3 = \varrho\sin\varphi\sin\psi\cos\chi,$$
$$y_4 = \varrho\sin\varphi\sin\psi\sin\chi,$$

weil $\varrho = 1$ ist, das Schema

(a):	$\varphi = 0,$	1
(b):	$\varphi = 6\alpha, \begin{bmatrix}\psi = 0, & \beta, & \pi-\beta, & \pi \\ \chi = & 12k\alpha, & 6(2k+5)\alpha, & \end{bmatrix}$	12
(c):	$\varphi = 10\alpha, \begin{bmatrix}\psi = & \gamma. & \delta, & \pi-\delta, & \pi-\gamma \\ \chi = 6(2k+5)\alpha, & 6(2k+5)\alpha, & 12k\alpha & 12k\alpha & \end{bmatrix}$	20
(d):	$\varphi = 12\alpha,$ [ψ und χ wie unter (b)]	12
(e):	$\varphi = 15\alpha, \begin{bmatrix}2\psi = & \beta, & \pi-\beta, & \pi, & \pi+\beta, & 2\pi-\beta \\ \chi = 12k\alpha, & 6(2k+5)\alpha, & 3(2l+5)\alpha, & 12k\alpha, & 6(2k+5)\alpha & \end{bmatrix}$	30
(f):	$\varphi = 18\alpha,$ [ψ und χ wie unter (b)]	12
(g):	$\varphi = 20\alpha,$ [ψ und χ wie unter (c)]	20
(h):	$\varphi = 24\alpha,$ [ψ und χ wie unter (b)]	12
(i):	$\varphi = 30\alpha,$	1

wo zur Abkürzung α für $\frac{\pi}{30}$ steht, β, γ, δ durch die Beziehungen

$$\cos\beta = \tfrac{1}{6}\sqrt{5}, \quad \operatorname{tg}\gamma = 3 - \sqrt{5}, \quad \operatorname{tg}\delta = 3 + \sqrt{5}$$

bestimmt sind, und für alle k der Reihe nach 1, 2, 3, 4, 5, an Stelle von l in (e) aber der Reihe nach 1, 2, ..., 10 gesetzt werden soll.

Wahrscheinlich führt dieses einfache Schläflische Koordinatensystem auch zu der einfachsten Bezeichnungsweise der 120 Eckpunkte des Z_{600}, wenn wir diese Eckpunkte mittels der mit zwei Indices versehenen Buchstaben $a, b, \ldots, h, i$ folgendermaßen bezeichnen:

$$\left|\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & a & & & & \\
 & & b^1 & & 5\,b_k^2 & & 5\,b_k^3 & & b^4 \\
 & & 5\,c_k^1 & & 5\,c_k^2 & & 5\,c_k^3 & & 5\,c_k^4 \\
 & & d^1 & & 5\,d_k^2 & & 5\,d_k^3 & & d_k^4 \\
5\,e_k^1 & & & 5\,e_k^2 & & 10\,e_l^3 & & 5\,e_k^4 & & 5\,e_k^5 \\
 & & f^1 & & 5\,f_k^2 & & 5\,f_k^3 & & f_k^4 \\
 & & 5\,g_k^1 & & 5\,g_k^2 & & 5\,g_k^3 & & 5\,g_k^4 \\
 & & h_h^1 & & 5\,h_k^2 & & 5\,h_k^3 & & h_k^4 \\
 & & & & i & & & &
\end{array}\right|,$$

wo k wieder für 1, 2, .., 5 und l für 1, 2, .., 10 steht.

Es ist nicht schwierig, in dieser Bezeichnung die Eckpunktequadrupel der 600 begrenzenden Tetraeder des Z_{600} anzugeben, was dann weiter, wie schon hervorgehoben wurde, zu den Koordinaten der 600 Eckpunkte des Z_{120} führen kann. Eine Tabelle dieser Tetraeder würde mit

$$5\,a\,b^1\,b_k^2\,b_{k+1}^2, \quad 5\,a\,b_k^2\,b_{k+1}^2\,b_{k+3}^2, \quad 5\,a\,b_k^2\,b_{k+3}^2\,b_{k+4}^2, \quad 5\,a\,b_k^2\,b_{k+1}^3\,b^4,$$

d. h. mit 20 Tetraedern $a\,b\,b\,b$ anfangen und — wenn abkürzend für $a\,b\,b\,b$ wieder $a\,b^3$ geschrieben wird — aus

$$20\,a\,b^3, \quad 20\,b^3\,c, \quad 30\,b^2\,c^2, \quad 60\,b\,c^2\,d, \quad 60\,c^2\,d\,e, \quad 60\,c\,d\,e^2,$$
$$20\,c\,e^3, \quad 60\,d\,e^2\,f, \quad \text{usw.}$$

bestehen. In dieser Tabelle, welche hier nicht aufgenommen werden kann, würden die 60 $d\,e^2\,f$ die Mittenglieder bilden.

72. Projektionen und Schnitte der regulären Zelle. Es würde uns zu weit führen, bei allen sechs regulären Zellen die regelmäßigen Projektionen und Schnitte zu erwähnen, welche mit den vier verschiedenen Gruppen von Hauptstrahlen OE_0, OK_0, OF_0, OR_0 in Verbindung stehen. Deshalb lassen wir bei den fünf regulären Zellen, welche vier verschiedene Hauptstrahlengruppen zulassen, die Stellungen OK_0 und OF_0 außer Betracht, indem wir dann im allgemeinen und speziell für diese Stellungen hinweisen auf die in Nr. 70 angeführte Amsterdamer Schrift und auf zwei andere mit analogen, sich auf Z_8, Z_{16}, Z_{24} beziehenden Titeln.

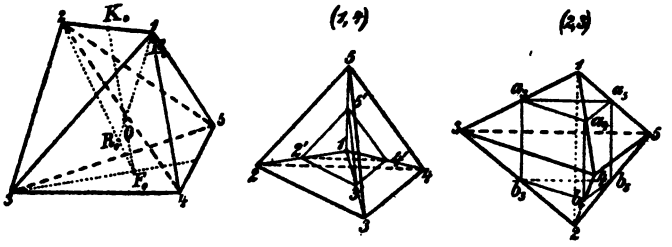


Fig. 69.

a) *Fünfzell.* In der Richtung $OE_0 = OR_0$ oder $OK_0 = OF_0$ (Fig. 69) projizieren sich die Eckpunkte 1, 2, 3, 4, 5 des Z_5 als Mittelpunkt 1 und Ecken 2, 3, 4, 5 eines Tetraeders

oder als die Ecken einer Doppelpyramide mit den Scheiteln 1, 2 und dem Basisdreiecke 3, 4, 5. Die Schichtung ist im ersten Falle (1, 4), im zweiten (2, 3). Das erste Transformationsbild (64a) besteht aus einem sich um den Mittelpunkt 1 vom Punkte 1 bis zum Tetraeder 2 3 4 5 vergrößernden Tetraeder $2'\,3'\,4'\,5'$, das zweite aus einem dreiseitigen Prisma ($a_3\,a_4\,a_5$, $b_3\,b_4\,b_5$) mit der Gerade 1, 2 und dem Dreiecke 3, 4, 5 als Anfangs- und Endstadium.

Bei der Projektion des Z_5 auf einen Raum, eine Ebene und eine Gerade können der Reihe nach die Projektionen von zwei, drei und vier Eckpunkten zusammenfallen. Wir empfehlen die Abzählung der verschiedenen möglichen speziellen Fälle als eine nützliche Übung.

b) *Achtzell.* Die Schichtung der 16 Ecken des Z_8 in Räumen senkrecht zum Hauptstrahl $OE_0 = AA'$ (Fig. 70) ist

$$A,\ 4B,\ 6C,\ 4B',\ A'$$

und also (1, 4, 6, 4, 1); die Quadrupel $4B$ und $4B'$ sind Eckpunkte von zwei kongruenten Tetraedern in negativ ähnlicher Lage, während das Sextupel $6C$ einem Oktaeder angehört. Und das entsprechende Transformationsbild besteht aus vier Figurengruppen, indem sich zunächst ein Tetraeder vom Punkte A aus zum Tetraeder $(4B)$ vergrößert, sodann ein an den Ecken abgestumpftes Tetraeder vom Tetraeder $(4B)$ sich bis zum Oktaeder $(6C)$ umbildet, und nachher zwei Figurengruppen in umgekehrter Reihenfolge vom Oktaeder $(6C)$ durch das Tetraeder $(4B')$ hindurch zum Punkte A' führen. Bringt man die Figuren (A), $(4B)$, $(6C)$, $(4B')$, (A') mittels paralleler Verschiebung auf den nämlichen Mittelpunkt, so erhält man als Projektion der Z_8 auf den Raum durch O senkrecht zu AA' ein Rhombendodekaeder, dessen 14 Eckpunkte mit dem doppelt gezählten Mittelpunkte O die Projektionen der 16 Achtzelleckpunkte bilden.

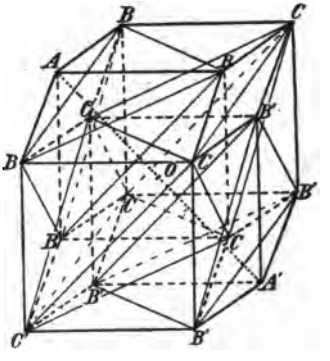


Fig. 70.

In der Stellung OR_0 erhält man für die Schichtung (8, 8), für das Transformationsbild ein erscheinendes und wieder verschwindendes unveränderliches Hexaeder, für die Projektion ein doppelt gezähltes Hexaeder.

c) *Sechzehnzell.* Die Schichtung in bezug auf einen Hauptstrahl OE_0 ist (1, 6, 1); in der Projektion bilden die acht Punkte die Ecken und das doppelt gezählte Zentrum eines Oktaeders. Und das Transformationsbild ist ein veränderliches Oktaeder.

In bezug auf einen Hauptstrahl OR_0 ergibt sich die Schichtung (4, 4) und erhält man, wie oben beim Z_8, zwei kongruente Tetraeder in negativ ähnlicher Lage. Die Projektion ist also ein Hexaeder und das Transformationsbild ein an den Ecken regelmäßig abgestumpftes Tetraeder.

d) *Vierundzwanzigzell.* Schon bei der Erzeugung des Z_{24} ergab sich [66a], daß seine 24 Eckpunkte sich in bezug auf einen Hauptstrahl OE_0 in die fünf Gruppen

$$A,\ 8B,\ 6C,\ 8B',\ A'$$

zerlegen, was der Schichtung (1, 8, 6, 8, 1) entspricht, und die zwei Oktupel $(8B)$, $(8B')$ und das Sextupel $(6C')$ die Eckpunkte zweier Hexaeder H, H' und eines Oktaeders O bilden. Deshalb ist die Projektion (Fig. 71) ein Rhombendodekaeder, dessen Hexaederecken B und Mittelpunkt M doppelt gezählt werden müssen. Das Transformationsbild durchläuft vier Figurenreihen; zunächst breitet sich ein Hexaeder vom Punkte M bis zum Hexaeder H aus, dann bildet ein an den Oktaederecken abgestumpftes Rhombendodekaeder sich vom Hexaeder H zum Projektionsrhombendodekaeder aus, und nachher erscheinen die schon erhaltenen Figuren in umgekehrter Reihenfolge.

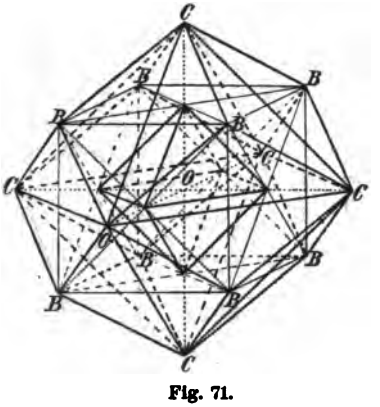


Fig. 71.

Die Schichtung des Z_{24} in bezug auf einen Hauptstrahl OR_0 ist (6, 12, 6), wobei die Sextupel $(6A)$, $(6A')$

wieder Eckpunkte zweier kongruenter und ähnlich liegender Oktaeder sind und die Punkte $(12\,B)$ die Eckpunkte (Fig. 72) der Kombination von Oktaeder und Hexaeder im Gleichgewicht bilden. Diese Kombination ist zu gleicher Zeit die Projektion des Z_{24}; ihre Ecken werden durch die doppelt zu zählenden Mittelpunkte A der Hexaederflächen zu den Projektionen der 24 Eckpunkte des Z_{24} ergänzt. Das Transformationsbild besteht aus einem an den Ecken abgestumpften Oktaeder, welches sich zunächst vom Oktaeder $(6\,A)$ zur Kombination $(12\,B)$ vergrößert und nachher in umgekehrter Reihenfolge den nämlichen Entwicklungsweg zurücklegt.

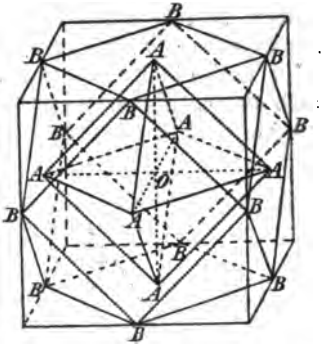


Fig. 72.

e) *Sechshundertzell.* Bei der Erzeugung des Z_{600} ergab sich, daß die 120 Eckpunkte sich in bezug auf einen Hauptstrahl OE_0 in die Gruppen

$$A,\ 12\,B,\ 20\,C,\ 12\,D,\ 30\,E,\ 12\,D',\ 20\,C',\ 12\,B',\ A'$$

teilen und das Schichtungssymbol also $(1, 12, 20, 12, 30, \ldots)$ ist. Dabei bilden dann die vier Gruppen $(12\,B)$, $(12\,D)$,

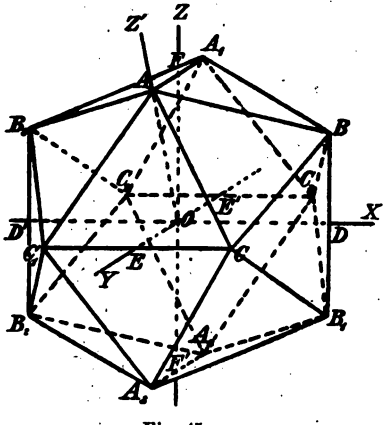


Fig. 45.

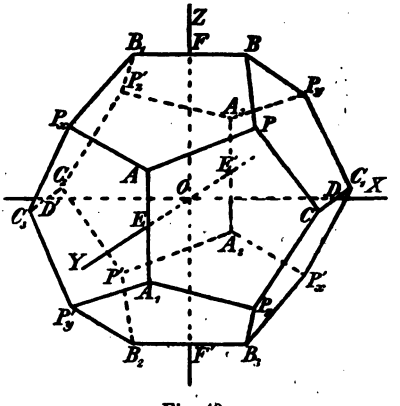


Fig. 46.

$(12\,D')$, $(12\,B')$ die Eckpunkte von vier Ikosaedern in der Stellung der Fig. 45, die zwei Gruppen $(20\,C)$, $(20\,C')$ die Eckpunkte zweier Dodekaeder in der Stellung der Fig. 46, während die Mittelgruppe (Fig. 73) ein System von Kantenmitten vom Dodekaeder oder Ikosaeder, d. h. das in Nr. 61 beschriebene halbreguläre Polyeder (30, 60, 32), bildet. Und weil die Eckpunkte des Ikosaeders $(12\,B')$ sich außerhalb dieses gleicheckigen Polyeders befinden, so ist die Projektion ein Polyeder (42, 120, 80), welches erzeugt wird, indem

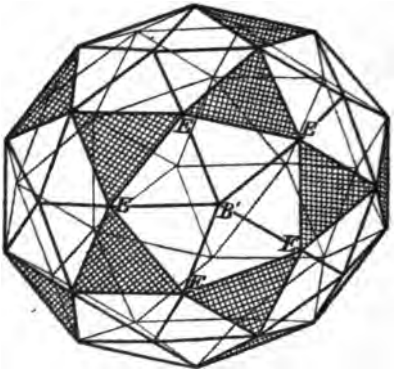


Fig. 73.

man auf den 12 fünfeckigen Flächen des Polyeders (30, 60, 32) regelmäßige Pyramiden von geeigneter Höhe errichtet.

Das Verständnis des Wesens des Transformationsbildes vom Z_{600} wird ungemein erleichtert, wenn man neben der Schichtung der 120 Eckpunkte auch die Lagerung der 600 begrenzenden Tetraeder ins Auge faßt. Sie ist — vergleiche auch Nr. 71 am Schlusse — in übersichtlicher Weise in Fig. 74 angegeben. Wir betrachten nun ganz kurz die Übergangsstadien a, b, c, d, e und die intermediären Schnitte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; dabei nehmen wir mit Frau A. Stott, der dritten Tochter des bekannten englischen Mathematikers Boole, an, daß die verschiedenen Tetraedergruppen eine verschiedene Farbe tragen, daß z. B. die Tetraeder $(a\,b^3)$, $(b^3\,c)$, ..., $(d\,e^3\,f)$ der Reihe nach rot, orange, gelb, grün, blau, indigo, violett, schwarz sind, die gestrichenen Tetrajeder die nämliche Farbe tragen wie die entsprechenden

ungestrichenen, und diese Farben sämtlich auf die Flächen der Schnitte übergehen. Dabei erscheint es zweckmäßig mit den intermediären Schnitten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ anzufangen und sich vor Augen zu stellen, wie diese durch Bewegung des Schnittraumes sich allmählich in die Übergangsformen a, b, c, d, e transformieren. Der Raum (α) schneidet nur die 20 Tetraeder $(a\,b^3)$ in gleichseitigen Dreiecken und liefert also ein rotes

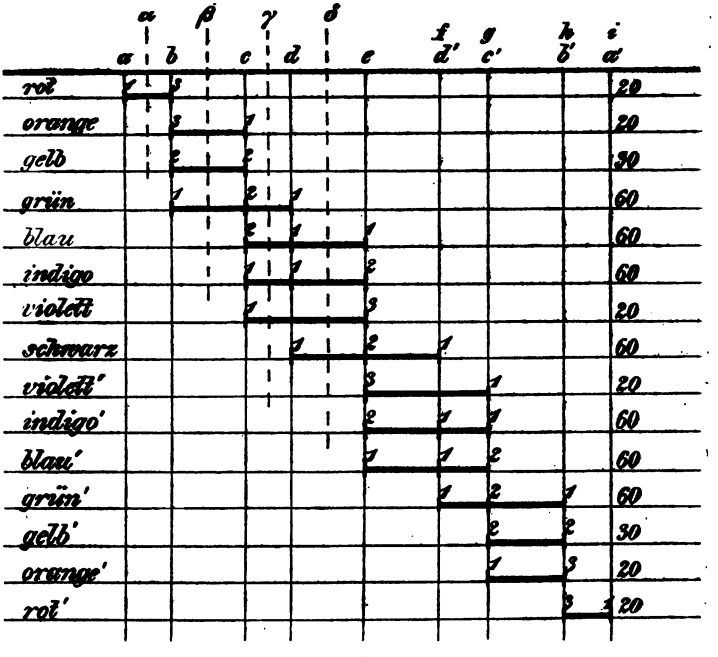


Fig. 74.

Ikosaeder. Der Raum (β) schneidet die 20 Tetraeder $(b^3 c)$ in orangefarbigen gleichseitigen Dreiecken, die 30 Tetraeder $(b^2 c^2)$ in gelben Rechtecken, die 60 Tetraeder $(b\,c^2\,d)$ in grünen gleichschenkligen Dreiecken; also ist der Schnitt ein dreifarbiges Polyeder (72, 180, 110). In der nämlichen Weise ergibt sich, daß der Raum (γ) 60 grüne gleichschenklige Dreiecke, 60 blaue gleichschenklige Trapeze, 60 indigo gleichschenklige Dreiecke, 20 violette gleichseitige Dreiecke,

der Raum (δ) 60 blaue gleichschenklige Dreiecke, 60 indigo gleichschenklige Trapeze, 20 violette gleichseitige Dreiecke, 60 schwarze gleichschenklige Dreiecke enthält, und jeder dieser beiden Schnitte also ein vierfarbiges Polyeder (132, 330, 200) ist. Und die Übergangsschnitte a, b, c, d, e sind der Reihe nach ein roter Punkt, ein außen rotes und innen orangefarbiges Ikosaeder, ein grünes Pyramidendodekaeder (32, 90, 60) — welches gleichflächige Polyeder dem dritten der 15 Archimedischen Polyeder [61] entspricht —, ein von 60 blauen gleichschenkligen Dreiecken, 60 indigo gleichschenkligen Dreiecken und 20 violetten gleichseitigen Dreiecken begrenztes Polyeder (72, 210, 140), und das von 20 violetten gleichseitigen und 60 schwarzen gleichschenkligen Dreiecken begrenzte Projektionspolyeder (42, 120, 80) von Fig. 73.

Das Z_{600} zerfällt nach der Schichtung der Eckpunkte in bezug auf einen Hauptstrahl OR_0 in die Punktgruppen $(4A), (4B), (6C), (12D), (12E), (12F), (4G), (12H), (4G'), ..,$ mit (4, 4, 6, 12, 12, 12, 4, 12, 4, 12, 12, 12, 6, 4, 4) als Schichtungssymbol. Bezogen auf rechtwinklige parallele Achsen gibt Fig. 75 die Lage dieser Punktgruppen an. Es bilden die Punktgruppen in der angegebenen Reihenfolge die Eckpunkte eines linken Tetraeders A, eines rechten Tetraeders B, eines Oktaeders C, eines an Ecken und Kanten abgestumpften linken Tetraeders D, eines an den Ecken abgestumpften rechten Tetraeders E, eines an den Ecken abgestumpften linken Tetraeders F, eines linken Tetraeders G, einer Kombination von Hexaeder und Oktaeder im Gleichgewicht H, wonach die Figuren sich — in umgekehrter Reihenfolge von G' bis A' zurück — mit diametral gegenüberliegenden Ecken wiederholen, also nach H ein rechtes Tetraeder G' kommt und die Reihe mit einem rechten Tetraeder A' schließt. Die hinzugefügten Zahlen erlauben, die Kanten in übersichtliche Weise anzugeben. So ist der Punkt 1 von den vier Punkten $(4A)$, oder, wie wir kurz sagen wollen, der Punkt 1_a verbunden mit den Ecken der vier ähnlichen und abwechselnd positiv und negativ ähnlich liegenden Dreiecke $(a_2 a_3 a_4)$, $(b_2 b_3 b_4)$, $(c_5 c_6 c_7)$, $(d_{1_\alpha} d_{1_\beta} d_{1_\gamma})$, der Punkt 1_b ebenso mit den Ecken der Dreiecke $(a_2 a_3 a_4)$, $(c_8 c_9 c_{10})$, $(d_{2_\alpha} d_{2_\beta} d_{4_\gamma})$, $(e_{1_\alpha} e_{1_\beta} e_{1_\gamma})$, der Punkt

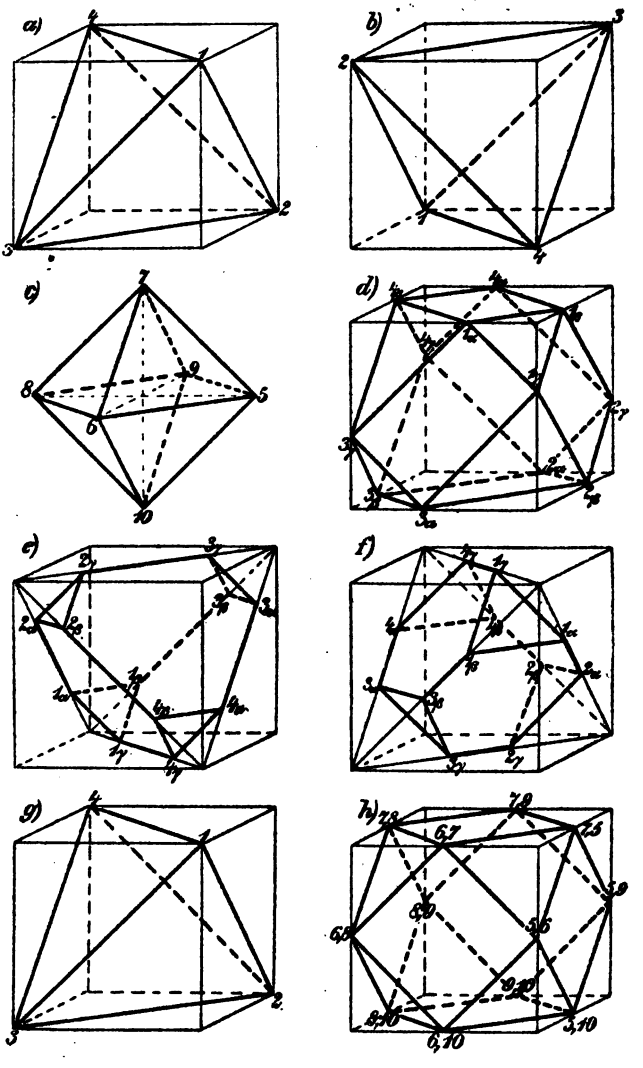


Fig. 75

c_5 mit den Punkten der Vorderflächen der Würfel von a), b), d), e), f), usw.

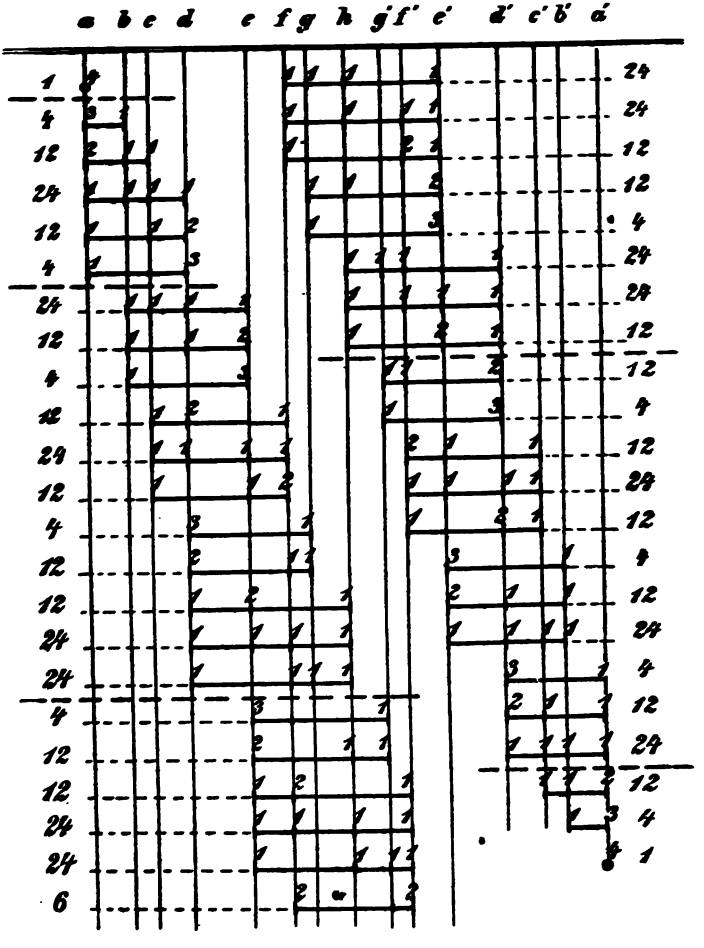


Fig. 76.

Damit der geneigte Leser leichter imstande sei die sieben intermediären Schnittgruppen $\alpha, \beta, \ldots$ und die acht Übergangsformen $a, b, \ldots, h$ zu verwirklichen, geben wir

hier die Lage der 600 Tetraeder in bezug auf den Hauptstrahl OR_0 an; sie enthält (Fig. 76) nicht weniger als 45 Gruppen. Wir kommen sogleich auf diesen Punkt zurück.

f) *Hundertzwanzigzell.* Die Bemerkung, daß die Schwerpunkte der Grenztetraeder des Z_{600} die Ecken eines Z_{120} sind, ermöglicht es, aus den Schichtungen dieser Tetraeder in bezug auf die Hauptstrahlen OR_0 und OE_0 des Z_{600} die Schichtungen der Ecken des Z_{120} in bezug auf die Hauptstrahlen OE_0 und OR_0 des Z_{120} abzulesen.

Fangen wir mit der Schichtung der Eckpunkte des Z_{120} in bezug auf OE_0 an, so haben wir auf das Schema der Fig. 76 zurückzugreifen. Die dort niedergelegte Schichtung

$$1a^4,\ 4a^3b,\ \ldots,\ 24ehg'f',\ 6f^2f'^2,\ 24fgh'e',\ \ldots,$$
$$4b'a'^3,\ 1a'^4,$$

deren Bestimmung wieder erleichtert wird durch die Bemerkung, daß das ganze Schema $80a$, $80b$, $120c$, $240d$, $240e$, $240f$, $80g$, $240h$, $80g'$, ... enthalten muß, würde für das Schichtungssymbol 45 Zahlen liefern, wenn nicht einige Tetraedergruppen in ihrer Schwerpunktsprojektion übereinstimmten. So findet man im ganzen nur 31 Punktgruppen, weil die Tetraedergruppen $(12bde^2,\ 12cd^2f)$, $(4be^3,\ 24cdef,\ 4d^3g)$, $(12cef^2,\ 12d^2fg)$, $(12e^2hg',\ 12ef^2f')$, $(24ehg'f',\ 6f^2f'^2,\ 24fgh'e')$, ... sich zu Gruppen von 24, 32, 24, 24, 54, ... Tetraedern mit gemeinschaftlicher Schwerpunktsprojektion vereinen. Also findet man in Verbindung mit dem Symbole (1, 4, 12, 24, 12, 4, 24, 24, 32, 24, 12, 24, 28, 24, 24, 54, ...) die Punktgruppen

$$1A,\ 4B,\ 12C,\ 24D,\ 12E,..,\ 24K,\ 12L,..,$$
$$24O,\ 24P,\ 54Q,\ 24P',\ \ldots$$

Zum weiteren Studium dieses Punktes fügen wir die Schichtung der 120 begrenzenden Dodekaeder hinzu (Seite 230, Fig. 77).

Die Schichtung der Eckpunkte des Z_{120} in bezug auf einen Hauptstrahl OR_0 ist

$$20A,\ 20B,\ 30C,\ 60D,\ 60E,\ 60F,\ 20G,\ 60H,\ 20G',\ \ldots$$

und wird also mittels Multiplikation mit fünf aus der entsprechenden Schichtung des Z_{600} abgeleitet. Weil aus dieser Bemerkung später ein Mittel zur Bestimmung der Lage

dieser Punktgruppen hervorgehen wird, so geben wir nur noch in Fig. 78 die Lage der 120 begrenzenden Dodekaeder an.

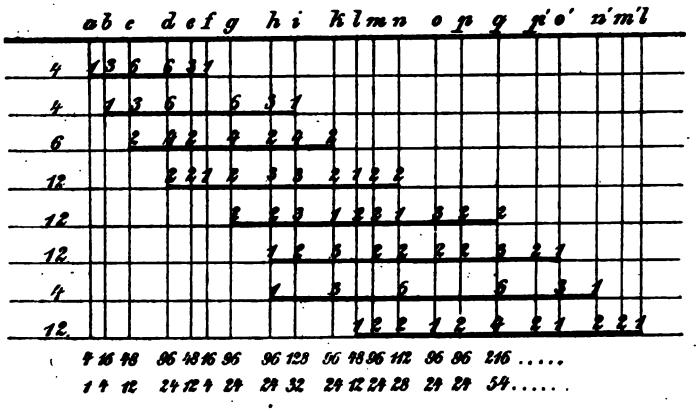


Fig. 77.

73. Zerlegung der regulären Zelle Z_{600} und $^{\nu}_{1}Z_{120}$ in gleichmittelpunktige reguläre Zelle. Bei der Ableitung der Zahl

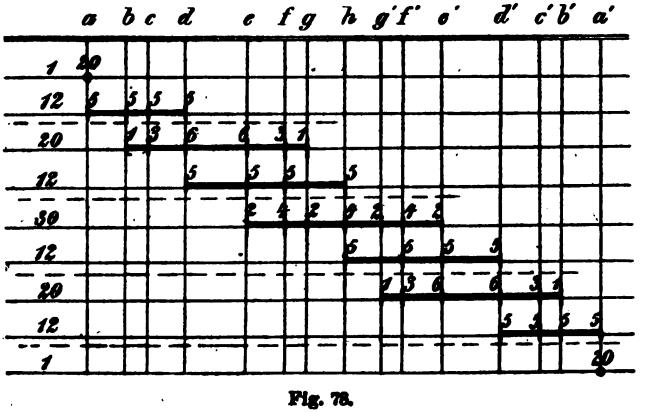


Fig. 78.

der Zelle von $Z^{(1)}_{600}$ hat sich ergeben, daß dies reguläre Polytop in der Koordinatenstellung OE_0 die acht Sechzehnzellecken mit drei verschwindenden Koordinaten und einer

Koordinate $\pm\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ enthält und ebenso die sechzehn Achtzellecken mit Koordinaten $\pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$. Weil diese 24 Ecken sämtlich dem nämlichen $Z_{24}^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}$ angehören, so findet man den Satz:

„Die 120 Eckpunkte eines $Z_{600}^{(1)}$ bilden auf zehn verschiedene Arten die Eckpunkte von fünf $Z_{24}^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}$. Ebenso bilden die 120 Grenzräume eines $Z_{120}^{(1)}$ auf zehn verschiedene Arten die Grenzräume von fünf $Z_{24}^{\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})\sqrt{2}}$."

Weiter gilt noch folgender Satz:

„Die 600 Eckpunkte eines $Z_{120}^{(1)}$ bilden in zweifacher Weise die Eckpunkte von fünf $Z_{600}^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\sqrt{2}}$. Ebenso bilden die 600 Grenzräume eines $Z_{600}^{(1)}$ in zweifacher Weise die Grenzräume von fünf $Z_{120}^{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{2}}$."

Wir müssen es dem Leser überlassen, sich die Beweise dieser Zerlegungstheoreme selbst zu bilden.

74. Die Schlegelschen Diagramme von Z_{600} und Z_{120}. Projiziert man (Fig. 75) auf den Raum des ersten Tetraeders a) aus einem Punkte des Lotes OR_0, welcher außerhalb des Z_{600} ganz in der Nähe dieses Raumes liegt, so erscheinen die Projektionen der Punktsysteme b), c), ..., a') als um den Mittelpunkt M des Tetraeders a) gruppierte, mit b), c), ..., a') ähnliche und ähnlich liegende Figuren. So findet man, von außen nach innen fortschreitend, die gleichmittelpunktigen Formen a), b, ..., a') in einem immer mehr verkleinerten Maßstabe und hat man, zur Herstellung eines Schlegelschen Diagrammes des Z_{600}, die Eckpunkte dieser sich umeinander herumlagernden Drahtfiguren in der angegebenen Weise durch Seitenfäden miteinander zu verbinden. Dabei sei dann noch erwähnt, daß die in Fig. 76 angegebenen Abtrennungsstriche sich auf die Schlegelschen Tetraederschichten beziehen. Vernichtet man mit der äußeren Begrenzung des Diagramms zu gleicher Zeit alle die in den Ecken des Tetraeders a) auslaufenden Fäden, so verschwinden außerdem die $4+12+24+12+4=56$ Tetraeder der ersten Schicht, und so bilden die 599 das Tetraeder a) ausfüllenden Tetraeder der Reihe nach fünf Schichten von 56, 164, 218, 144, 17 Tetraedern.

[Behufs eines eventuellen Wunsches selbst ein Schlegelsches Diagramm des Z_{600} herzustellen, bemerken wir folgendes. Liegt das Projektionszentrum bei einem Z_{600} vom Radius $(6+2\sqrt{5})\sqrt{2}=14{,}810$ des Umkugelraums in der Entfernung $\frac{1}{4}$ vom Tetraeder a) und betrachtet man bei allen Schichten, c) und c′) ausgenommen, zunächst die in der Figur angegebenen Hexaeder, so sind die Radien der Umkugeln der fünfzehn Figuren der Reihe nach in drei Dezimalen

5,605, 1,814, 1,401, 1,348, 1,130, 1,088, 0,601, 0,637,
0,453, 0,685, 0,521, 0,333, 0,212, 0,175, 0,115.

Nachher hat man dann, immer von den Kantenmitten aus, bei d) und d′) die Hexaederkanten einseitig und bei f) und f′) die Tetraederkanten nach beiden Seiten im Verhältnisse 0,236, bei e) und e′) die Tetraederkanten nach beiden Seiten im Verhältnisse 0,447 zu verkleinern. So erhält man ein naturgetreues Bild, das allerdings den Fehler aufweist, daß die Kanten von a) fast fünfzigmal größer sind als die von a′). Von den Kanten der fünfzehn einander umgebenden Figuren gehören nur die von a) und a′) und die zwölf kleineren von d), e), e′), d′) dem Z_{600} an.]

Bei der Konstruktion eines Schlegelschen Diagrammes des Z_{120} hat man nach der Bemerkung der vorhergehenden Nummer die sich umeinander herumlagernden Figuren, mittels einer Drehung mit der Periode fünf, der Zahl der Eckpunkte nach zu verfünffachen, bevor man die den Kanten entsprechenden Seidenfäden anbringt. Wegen der Kompliziertheit gehen wir auf diesen Punkt nicht weiter ein; nur möge bemerkt werden, daß sich aus Fig. 78 die Schichtung der 119 das Grenzdodekaeder ausfüllenden Dodekaeder in Gruppen von 12, 32, 42, 32, 1 ablesen läßt.

75. Winkelbeziehungen zwischen Hauptstrahlen. Aus den bei den Koordinatenstellungen erhaltenen Resultaten ist zu entnehmen, daß zwischen den Hauptstrahlen der regulären Zelle merkwürdige Winkelbeziehungen auftreten; deshalb betrachten wir die verschiedenen regulären Zelle jetzt in dieser Hinsicht.

Rücksichtlich der Orthogonalität bietet das Z_5 uns nichts. Bezeichnet man die Ecken mit $1, 2, \ldots, 5$, die

Kantenmitten mit (1 2), ..., (4 5), die Flächen- und die Raummittelpunkte mit (1 2 3), ..., (3 4 5) und (1 2 3 4), ..., (2 3 4 5) und den Cosinus des Winkels zwischen den vom Zellmittelpunkte O nach zwei dieser Punkte (a) und (b) gerichteten Vektoren mit $[a, b]$, so findet man

$$\begin{aligned}
[1, 2] &= -[1, 1\,2\,3\,4] = -\tfrac{1}{4}\,, \\
[1, 1\,2] &= -[1, 2\,3\,4] = \tfrac{1}{4}\sqrt{6}\,, \\
[1, 2\,3] &= -[1, 1\,2\,3] = -\tfrac{1}{6}\sqrt{6}\,, \\
[1\,2, 1\,3] &= -[1\,2, 1\,3\,4] = \tfrac{1}{6}\,, \\
[1\,2, 3\,4] &= -[1\,2, 1\,2\,3] = -\tfrac{2}{3}\,, \\
[1, 2\,3\,4\,5] &= [1\,2, 3\,4\,5] = -1\,.
\end{aligned}$$

Die Winkelbeziehungen zwischen den Hauptstrahlen des Z_8 und des Z_{16} werden zu gleicher Zeit gefunden. Wir leiten sie ab aus der Stellung E_0 eines $Z_8^{(2)}$ mittels der Bemerkung, daß die Koordinaten $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ der 16 Ecken der Reihe nach in die Koordinaten der 32 Kanten-, 24 Flächen- und 8 Raummittelpunkte übergehen, wenn man eine, zwei oder drei der vier Koordinaten ± 1 verschwinden läßt; diese Ableitung ist in gedrängter Kürze in umseitiger Tabelle enthalten.

Das Z_{24} hat 12, 48, 48, 12 Hauptstrahlen der Gattungen OE_0, OK_0, OF_0, OR_0. Denkt man sich das Zell in der Stellung E_0, so findet man für die Koordinatentypen der Endpunkte E, K, F, R dieser Hauptstrahlen

$E_4 \ldots (1, 0, 0, 0)$	$K_{32} \ldots (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
$E_8 \ldots (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$K_{16} \ldots (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$
$F_{48} \ldots (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$	$R_{12} \ldots (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$

wobei die angehängten Indizes die Zahl der entsprechenden Hauptstrahlen angeben. Hieraus folgen dann die Sätze:

„Die 96 Kantenmitten des $Z_{24}^{(1)}$ sind die Kantenmitten von drei Zellen $Z_8^{(1)}$, von welchen eines sich in der Stellung R_0, die übrigen sich in der Stellung E_0 befinden."

„Die 96 Flächenmittelpunkte des $Z_{24}^{(1)}$ sind die Kantenmitten von drei Zellen $Z_8^{(\frac{1}{2}\sqrt{2})}$ in der Stellung F_0."

„Die 24 Raummittelpunkte des $Z_{24}^{(1)}$ sind die Eckpunkte eines $Z_{24}^{(1)}$ in der Stellung R_0."

(E, E)		(E, K)		(E, F)		(E, R)
(1111)	(1 111)	(1111)	(1111)	(1111)	(1111)	(1111)
±(−1111)	(−1−111)	±(1110)	±(−1110)	±(1100)	(−1111)	±(1000)
±½	0	±½√3	±⅙√3	±½√2	0	±½

(K, K)			(K, F)			(K, R)
(0 111)	(0111)	(01 11)	(0111)	(01 11)	(0011)	(0111)
±(0−111)	±(±1011)	(±10−11)	±(0011)	(00−11)	±(±1001)	±(0001)
±⅓	⅔	0	±⅓√6	0	±⅙√6	±½

(K, R)	(F, F)			(F, R)		(R, R)
(0111)	(00 11)	(0011)	(0011)	(0011)	(0011)	(0001)
(±1000)	(00−11)	±(±1001)	±(±1100)	±(0001)	±(1000)	±(1000)
0	0	±½	0	±½√2	0	0

In der folgenden Tabelle, welche die rechten Winkel zwischen zwei Hauptstrahlen OA, OB angibt, beziehen sich die zwei Zahlen unten in jedem Fache auf die rechten Winkel AOB_k und A_iOB_k.

(E, E)	(E, K)	(E, F)	(E, R)	(K, K)	(K, F)
(1000)	(1000)	(1000)	(1000)	(1110)	(1110)
(0001)	(0111)	(0112)	(0011)	(−1110)	(−2101)
3 18	4 48	12 144	6 72	12 288	12 576

(K, R)	(F, F)	(F, R)	(R, R)	Total
(1110)	(2110)	(2 110)	(1 100), (1100)	
(−1100)	(−1021)	(0−110)	(1−100), (0011)	1548
3 144	8 192	1 48	3 18	

76. Die Sternpolytope $\overline{Z}_{600}$ und $\overline{Z}_{120}$. Die 1902 erschienene Arbeit Schläflis gibt, wahrscheinlich zum ersten Male, die Theorie der beiden Sternpolytope $\overline{Z}_{600}$ und $\overline{Z}_{120}$, deren erstes bei ihm ein „überschlagenes Hexakosioschem," das zweite ein „überschlagenes Hekatonkaieikosaschem" genannt wird. Weil selbstverständlich die Eckpunkte dieser überschlagenen Polytope zu gleicher Zeit Eckpunkte der gewöhnlichen Z_{600} und Z_{120} sind, so knüpfen wir die Betrachtung des $\overline{Z}_{600}$ an die Fig. 75 an. Mittels der schon mehrfach verwendeten Tabellen findet man nämlich leicht, daß man auch ein System von 720 gleichen Kanten erhält mittels der Verbindung von 1_a mit den Ecken der vier Dreiecke $(e_{1_\alpha} e_{1_\beta} e_{1_\gamma})$, $(g_2 g_3 g_4)$, $(g'_2 g'_3 g'_4)$, $(e'_{1_\alpha} e'_{1_\beta} e'_{1_\gamma})$, von 1_b mit den Ecken der vier Dreiecke $(f_{1_\alpha} f_{1_\beta} f_{1_\gamma})$, $(h_{6,7} h_{7,5} h_{5,6})$, $(f'_{2_\alpha} f'_{3_\beta} f'_{4_\gamma})$, $(d'_{1_\alpha} d'_{1_\beta} d'_{1_\gamma})$, von c_6 mit den vier Punkten der Hinterfläche des Würfels d), mit den vier Punkten (7, 5), (7, 8), (8, 10), (5, 10) der Mittelfläche des Würfels h), mit den vier Punkten der Vorderfläche des Würfels d'), usw.

Wir widmen noch einige Zeilen der Bestimmung der Artzahl [57] des $\overline{Z}_{600}$, welche angibt, wieviele der 600 begrenzenden Tetraeder von irgend einem bestimmten Radius

des Umkugelraumes getroffen werden; sie ist von Schläfli berechnet worden in analytischer Weise [58]. In der Koordinatenstellung OK_0 — vergleiche Nr. 71 am Schlusse — wird (Fig. 79) das Z_{600} begrenzt von den 600 Tetraedern:

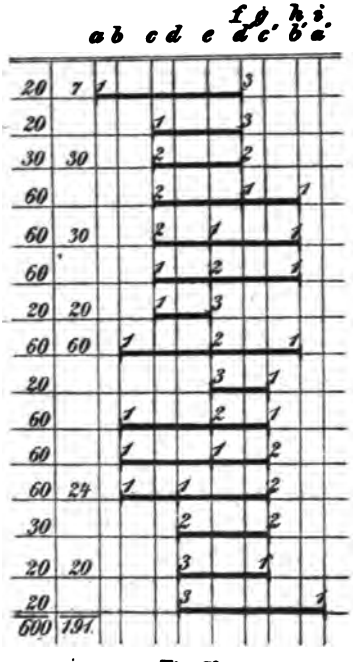


Fig. 79.

$$20\,af^2,\ 20\,cf^2,\ 30\,c^2f^2,$$
$$60\,c^2fh,\ 60\,c^2eh,\ 60\,ce^2h,$$
$$20\,ce^3,\ 60\,be^2h,\ \ldots$$

Hat nun ein Punkt hinsichtlich irgend eines dieser Tetraeder die baryzentrischen Koordinaten (p_1, p_2, p_3, p_4) und kommt diesem Punkte in bezug auf das Koordinatensystem der Stellung des Z_{600} das Koordinatenquadrupel (x_1, x_2, x_3, x_4) zu, so gelten wenn $(y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, y_3^{(i)}, y_4^{(i)})$ die Koordinaten der Eckpunkte P_i des Tetraeders sind, die Beziehungen

$$x_i \sum_{k=1}^{4} p_k = \sum_{k=1}^{4} p_k y_k^{(i)}, \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Nur wenn für $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ aus den vier Beziehungen vier positive Werte p_1, p_2, p_3, p_4 gefunden werden, liegt der Schnittpunkt mit der positiven Achse OX_1 innerhalb des Tetraeders. So fand Schläfli — vergleiche weiter Nr. 58 — die gesuchte Artzahl 191 aus

$$7\,af^3,\ 30\,c^2f^2,\ 30\,c^2eh,\ 20\,ce^3,\ 60\,be^2h,\ 24\,bdg^2,\ 20\,d^3g.$$

77. Die regulären Zelle und die Gruppentheorie. Symmetrieräume. Erweiterte Gruppen. Bei den Bewegungen, welche ein reguläres Zell in sich transformieren, behält das Zellzentrum O seine Lage bei; deshalb (I 112) bestehen diese

Bewegungen aus Rotationspaaren zweier senkrechten Ebenen durch O umeinander. Also treten bei diesen Bewegungen die ebenen Projektionen der regulären Zelle in den Vordergrund; hat man zwei in senkrechten Ebenen liegende Projektionen gefunden, deren eine bei Drehung um $\frac{2\pi}{k}$, und deren andere bei Drehung um $\frac{2\pi}{k'}$, jedesmal um O, in sich transformiert wird, so hat man eine Untergruppe vom Grade kk' ermittelt.

Allein wir ziehen es vor zunächst folgenden allgemeinen Satz zu beweisen:

„Der Grad einer Polytopengruppe wird gefunden, indem man die doppelte Flächenzahl des regulären Polytopes mit der Kantenzahl jeder Seitenfläche multipliziert."

Es ist die Orientierung [59] des regulären Zelles $ABCD\ldots$ in bezug auf eine gegebene Lage $PQRS\ldots$ bestimmt, sobald man weiß, welche Ecke A, Kante AB durch A und Fläche ABC durch AB der Reihe nach mit P, PQ, PQR zusammenfallen soll. Also ist der Grad der Gruppe das Produkt ek_ef_k der drei Zahlen e, k_e, f_k, welche angeben, wieviel Ecken A, Kanten AB durch A und Flächen ABC durch AB es gibt. Nun deutet ek_e an, wie oft eine Kante durch einen Eckpunkt geht, d. h. die doppelte Kantenzahl; also ist $ek_e = 2k$. Weil nun kf_k angibt, wie oft eine Kante in einer Fläche liegt, so ist hiermit der Satz bewiesen.

Nach diesem Satze ist 60 der Grad der Fünfzellgruppe, 192 der Grad der Acht- oder Sechzehnzellgruppe, 576 der Grad der Vierundzwanzigzellgruppe und 7200 der Grad der Gruppe von Z_{120} und Z_{600}. Für die Art der Zerlegung dieser Gruppen in Untergruppen mag auf die Dissertation von Dr. S. L. van Oss hingewiesen worden (P. den Boer, Utrecht, 1894).

Läßt man Spiegelung in den Symmetrieräumen zu, so erhält man vier erweiterte Gruppen mit den Gradzahlen 120, 384, 1152, 14400. In bezug auf die Zahl dieser Symmetrieräume S ist die Bemerkung wichtig, daß jeder S beim Z_5 eine Kante senkrecht halbiert, bei den übrigen regulären Zellen in O auf einem Hauptstrahl senkrecht steht. So hat das Z_5 10 Symmetrieräume und findet man, wenn

man die Symmetrieräume senkrecht auf den Hauptstrahlen OE_0, OK_0, OF_0, OR_0 durch die Symbole S_e, S_k, S_f, S_r andeutet, beim

$$Z_{16} \ldots 32\,S = 4\,S_e + 12\,S_k + 16\,S_f,$$
$$Z_{24} \ldots 120\,S = 12\,S_e + 48\,S_k + 48\,S_f + 12\,S_r,$$
$$Z_{600} \ldots 360\,S = 60\,S_e + 300\,S_r.$$

Aufgabe 78. Zeige, daß die Gruppe des Fünfzells mit der Gruppe der geraden Vertauschungen von fünf Elementen isomorph ist.

78. Die Kristallformen des regulären Systems. Hemiedrie. Kristallkombinationen. Bei den vierdimensionalen Kristallen des regulären Systems gehen wir von einem Polytope aus, dessen Grenzräume von den Achsen OX_1, OX_2, OX_3, OX_4

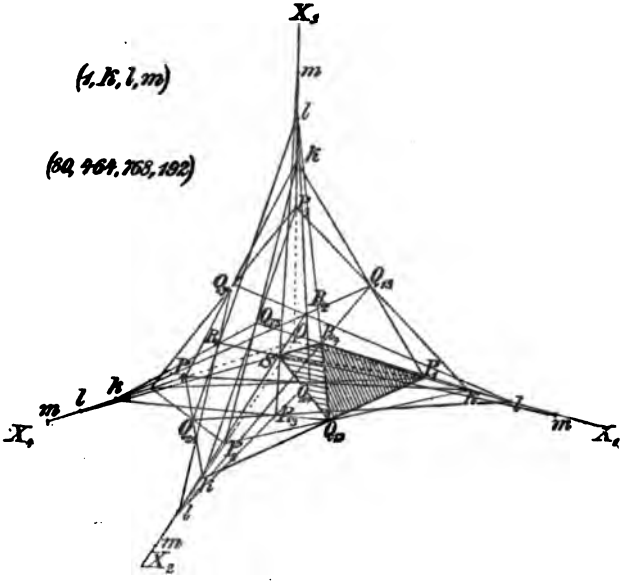


Fig. 80.

eines rechtwinkligen Systems in irgend welcher Reihenfolge gegebene Stücke $\pm a_1$, $\pm a_2$, $\pm a_3$, $\pm a_4$ abschneiden. Von diesem Polytope zeigt Fig. 80 die Konstruktion der im posi-

tiven vierdimensionalen Koordinatenwinkel liegenden Grenzräume, nachdem das System (a_1, a_2, a_3, a_4) der Parameter durch ihre Verhältnisse $(1, k, l, m)$ ersetzt worden ist; hierbei ist dann immer $1 \leqq k \leqq l \leqq m$ anzunehmen. Diese Konstruktion wird wohl unmittelbar aus der Figur abzulesen sein, wenn noch bemerkt wird, daß P, Q, R, S der Reihe nach Punkte mit drei, zwei, einer und null verschwindenden Koordinaten andeuten und die nicht verschwindenden Koordinaten jedes dieser Punkte für sich den nämlichen absoluten Wert haben; von den 24 im positiven Koordinatenwinkel liegenden kongruenten unregelmäßigen Tetraedern ist nur ein einziges ganz hineingezeichnet. So findet man ein Polytop mit

$$8P + 24Q + 32R + 16S = 80 \text{ Ecken},$$
$$48PQ + 96PR + 64PS + 96QR + 96QS + 64RS = 464 \text{ Kanten},$$
$$192PQR + 192PQS + 192PRS + 192QRS = 768 \text{ Flächen}$$

und 384 Grenzräumen, d. h. ein (80, 464, 768, 384).

In einer kleinen Sonderschrift (*Assoc. franç. pour l'avancement d. sc.*, Bordeaux, 1895) haben wir die Form der Figuren angegeben, welche entstehen, wenn einige der Parameterwerte einander gleich oder unendlich werden. Sie sind in systematischer Anordnung:

1. $(1, k, l, m)$ ... (80, 464, 768, 384)

2. $(1, 1, k, l)$ ... (56, 248, 384, 192)
3. $(1, k, k, l)$ ... (80, 368, 480, 192)
4. $(1, k, l, l)$ ... (80, 464, 576, 192)

5. $(1, 1, 1, k)$ ... (24, 88, 128, 64)
6. $(1, 1, k, k)$ ... (56, 248, 288, 96)
7. $(1, k, k, k)$ ... (80, 208, 192, 64)

8. $(1, 1, 1, 1)$ ... (8, 24, 32, 16)

9. $(1, k, l, \infty)$ ... (48, 240, 384, 192)

10. $(1, 1, k, \infty)$ ... (24, 120, 192, 96)
11. $(1, k, k, \infty)$ ... (48, 240, 288, 96)

12. $(1, 1, 1, \infty) \ldots (24, 88, 96, 32)$

13. $(1, k, \infty, \infty) \ldots (24, 96, 120, 48)$

14. $(1, 1, \infty, \infty) \ldots (24, 96, 96, 24)$

15. $(1, \infty, \infty, \infty) \ldots (16, 32, 24, 8)$

Unter diesen fünfzehn Polytopen erkennt man in den Fällen $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, \infty, \infty)$, $(1, \infty, \infty, \infty)$ der Reihe nach die Zelle Z_{16}, Z_{24}, Z_8; die übrigen sind der Erzeugungsweise nach sämtlich „gleichräumig". Es fragt sich, ob sich unter diesen auch halbreguläre vorfinden, d. h. Polytope, für welche jeder der vier Punktgruppen P, Q, R, S kongruente reguläre Vielkante entsprechen. Nun ergibt sich, daß die Zahl der Kanten durch einen Punkt P bei den Nummern 1, 2, 4, 6 sechsundzwanzig, bei 7 achtzehn, bei 3, 5, 9, 10, 11, 12 vierzehn und bei 13 acht beträgt; weil es kein reguläres Polyeder mit 26, 18 oder 14 Ecken gibt, so kann nur das Polytop $(1, k, \infty, \infty)$ halbregulär sein. Und dies ist auch für jeden Wert von k der Fall; denn die 24 Ecken dieses Polytops bestehen aus 8 Punkten P und 16 Punkten S (Eckpunktkombination von Z_{16} und Z_8) und, indem die Vielkante mit Scheitel S immer regulär sind, so sind die Vielkante mit Scheitel P es hier auch.

Die 15 gleicheckigen Polytope, welche den gefundenen Kristallformen dual gegenüberstehen, werden bei geeigneter Wahl des Radius dieses Kugelraumes von den entsprechenden ursprünglichen Polytopen an den Ecken abgestumpft. So stumpft das Z_{16} in Stellung OE_0 dem Z_8 in Stellung OR_0 die Ecken ab, wobei ein Polytop (64, 128, 88, 24) entsteht, welches in ein (32, 96, 88, 24) übergeht, sobald die beiden neuen Endpunkte irgend einer Kante sich in der Mitte dieser Kante vereinen; das erste dieser Polytope wird begrenzt von sechzehn Tetraedern und acht an den Ecken abgestumpften Hexaedern, während diese Hexaeder beim zweiten in Gleichgewichtskombinationen von Hexaeder und Oktaeder übergegangen sind. Ebenso entsteht bei der Eckenabstumpfung des Z_{16} in Stellung OE_0 durch das Z_8 in Stellung OR_0 im allgemeinen ein Polytop (48, 120, 96, 24) und speziell ein Polytop (24, 96, 96, 24), von welchen das erste von acht Oktaedern und sechzehn an den Ecken

abgestumpften Tetraedern begrenzt wird und das zweite ein Z_{24} ist. Endlich stumpft das Z_{24} in Stellung OR_0 dem Z_{24} in Stellung OE_0 die Ecken ab, wobei die beiden Polytope (144, 384, 288, 48) und (96, 216, 264, 48) entstehen; von diesen wird das erstere begrenzt von 24 Hexaedern und 24 an den Ecken abgestumpften Oktaedern, das letztere von 24 Hexaedern und 24 Gleichgewichtskombinationen von Hexaeder und Oktaeder.

Für die verschiedenen Arten von Hemiedrie vergleiche man Nr. 62; von diesen drei führt die erste bei der Anwendung auf das Z_{16} zu der Zerlegung dieses Polytopes, den Grenzräumen nach, in zwei Zelle Z_8 zurück.

Aufgabe 79. Weshalb ist der Name „Hemiedrie" eigentlich nicht mehr geeignet?

79. Die vierdimensionalen Netze. Wir untersuchen jetzt, welche reguläre Zelle reguläre Netze bilden können und bestimmen zu diesem Zwecke den Winkel zwischen zwei benachbarten Grenzräumen dieser Polytope, insofern sie noch nicht gefunden sind, mittels der einfachen Bemerkung, daß der Winkel zwischen zwei benachbarten Hauptstrahlen OE_0 eines regulären Zelles das Supplement des Winkels zwischen zwei benachbarten Grenzräumen des dual reziproken Zelles ist. Die folgende kleine Tabelle enthält die gesuchten Resultate und außerdem einige andere Ergebnisse, welche wir früher, der größeren Kompliziertheit der Zelle Z_{120} und Z_{600} wegen, zu erwähnen unterließen, nämlich die Kantenlänge, die dreidimensionale Oberfläche und den vierdimensionalen Inhalt, für r_u als Umradius, der Reihe nach in r_u, r_u^3, r_u^4 als Einheit.

	$\sin\omega$	ω	K	O	I
Z_5	$\frac{1}{4}\sqrt{15}$	75° 31′ 21″	$\frac{1}{2}\sqrt{10}$	$\frac{25}{24}\sqrt{5}$	$\frac{25}{384}\sqrt{5}$
Z_8	1	90°	1	8	1
Z_{16}	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	120°	$\sqrt{2}$	$5\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Z_{24}	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	120°	1	$8\sqrt{2}$	2
Z_{120}	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	144°	$\frac{1}{4}(3-\sqrt{5})\sqrt{2}$	$\frac{15}{2}(3\sqrt{5}-5)\sqrt{2}$	$\frac{15}{8}\sqrt{5}$
Z_{600}	$\frac{1}{8}(3\sqrt{5}+1)$	164° 28′ 39″	$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$	$50(\sqrt{5}-2)\sqrt{2}$	$\frac{25}{8}(\sqrt{5}-1)$

Weil die gefundenen Winkel bei Z_8, Z_{16}, Z_{24} ein Viertel und resp. ein Drittel von 360^0 sind, so können nur diese Zelle bei den regulären vierdimensionalen Netzen auftreten. Wir zeigen nun noch, daß das einfachste vierdimensionale Netz, d. h. das *Achtzellnetz*, dessen Existenz sofort einleuchtet, sich in jedes der beiden übrigen Netze umbilden läßt. Wir wenden dazu zunächst die beiden in Nr. 63 beschriebenen Transformationsverfahren an.

Denkt man sich das Achtzellnetz aus abwechselnd weißen und schwarzen Achtzellen zusammengesetzt — wie im Damenbrett die Quadrate —, jedes der weißen Achtzelle zerlegt in acht kongruente Pyramiden mit dem Zellmittelpunkt als gemeinschaftlichem Scheitel und den acht Zellgrenzhexaedern als Basisräumen, und jede dieser weißen Pyramiden vereinigt mit demjenigen schwarzen Achtzelle, welchem sie sich mit ihrem Basisraume anschmiegt, so entsteht das *Vierundzwanzigzellnetz*. Sind nämlich die Koordinaten der Eckpunkte irgend eines der schwarzen Achtzelle $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$, so sind die Koordinaten der Eckpunkte der Scheitel der acht hinzutretenden weißen Pyramiden

$$(\pm 2, 0, 0, 0), (0, \pm 2, 0, 0), (0, 0, \pm 2, 0), (0, 0, 0, \pm 2)$$

und diese acht Eckpunkte eines Sechzehnzelles bilden mit den sechzehn Eckpunkten des erwählten schwarzen Achtzelles die Ecken eines Z_{24}.

Das andere in Nr. 63 angewandte Verfahren führt zum analogen Resultate. Betrachtet man sechzehn Achtzelle mit gemeinschaftlicher Ecke, zerlegt jedes dieser sechzehn Zelle in zwei kongruente Hälften mittels Räume senkrecht auf den durch die gemeinschaftliche Ecke gehenden Zelldiagonalen, und fügt die um diesen Punkt herumliegenden sechzehn Hälften zusammen, so entsteht wieder ein Z_{24} von genau derselben Größe, usw.

Um einzusehen, wie das *Sechzehnzellnetz* erzeugt werden kann, gehen wir anfänglich einen Schritt zurück zum Hexaedernetz des dreidimensionalen Raumes, dessen Hexaeder wieder damenbrettähnlich abwechselnd weiß und schwarz gefärbt sein mögen. Denkt man sich nun jedes weiße Hexaeder zerlegt in ein linkes Tetraeder und vier rechtwinklige Vierflache, jedes schwarze in ein rechtes Tetraeder und vier rechtwinklige Vierflache, so nehmen die Tetraeder nur die Hälfte der

Eckpunkte der Hexaeder in Anspruch und liegt um jeden der übrigen Hexaederecken herum ein Oktupel von abwechselnd weißen und schwarzen Vierflachen, welche miteinander ein Oktaeder bilden. So löst sich das Hexaedernetz in ein gemischtes Netz von Oktaedern und rechten und linken Tetraedern auf. Weil nun irgend ein Z_8 sich den Eckpunkten nach in zwei Z_{16} zerlegen läßt, welche zur Unterscheidung ein linkes Z_{16} und ein rechtes Z_{16} genannt werden können, so kann beim damenbrettartig gefärbten Achtzellnetz der nämliche Weg begangen werden, d. h. man kann jedes weiße Z_8 in ein linkes Z_{16} und acht rechtwinklige Fünfräume, jedes schwarze Z_8 in ein rechtes Z_{16} und acht rechtwinklige Fünfräume zerlegen; auch hier nehmen dann die eingeschriebenen linken und rechten Z_{16} die Hälfte der Achtzellpunkte in Anspruch und bilden sich um die übrigen Achtzelleckpunkte herum durch Zusammenfügung von sechzehn abwechselnd gefärbten rechtwinkligen Fünfräumen neue Zelle Z_{16}. So erhält man eine Ausfüllung des R_4 durch drei gleich starke Gruppen von Z_{16} gleicher Größe in verschiedener Stellung, welche als regulär betrachtet werden muß, weil man in den drei zu den Quadrupeln von Zelldiagonalen parallelen Geraden durch den nämlichen Punkt das System der zwölf Zelldiagonalen eines Z_{24} erkennt.

Aufgabe 80. Beweise, daß der Inhalt eines der Z_{16} ein Drittel des Inhaltes eines der Z_8 ist.

---

§ 8. Reguläre Polytope höherer Dimension.

80. Die drei regulären Polytope im R_n. Es sind uns von Hause aus drei reguläre Polytope des R_n bekannt: 1. das reguläre Simplex, 2. das Maßpolytop, 3. das dem Maßpolytop reziprok verwandte reguläre Polytop. Wir bezeichnen sie mit Schlegel der Reihe nach durch A_n, B_n, C_n und bemerken, daß A_n und C_n von Polytopen A_{n-1} begrenzt sind, während B_n von Polytopen B_{n-1} eingeschlossen wird.

Aus der Betrachtung des Winkels zwischen den benachbarten Grenzräumen R_{n-1} folgt unmittelbar, daß für $n > 4$

die Polytope A_n, B_n, C_n zu gleicher Zeit die einzig möglichen sind. Wird dieser Winkel bei A_n, B_n, C_n der Reihe nach α_n, β_n, γ_n genannt, so findet man nämlich allgemein

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha_n}{2} = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}, \quad \beta_n = 90^0, \quad \operatorname{tang}\frac{\gamma_n}{2} = \sqrt{n-1},$$

wie in der nächstfolgenden Nummer etwas näher betont wird, und deshalb ergibt sich für $n \geqq 4$

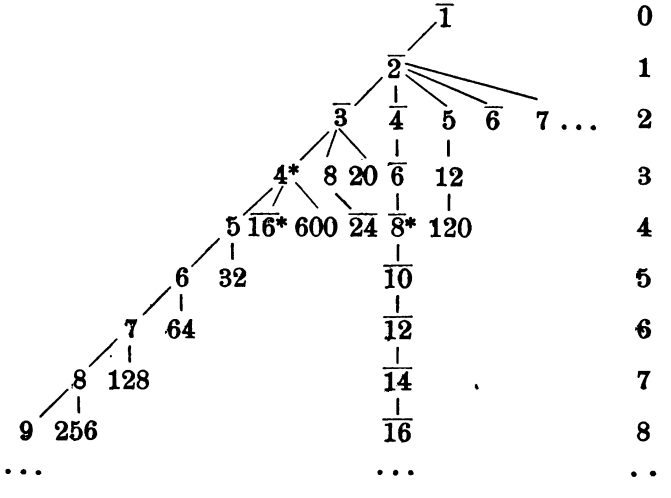
$$72^0 < \alpha_n < 90^0 = \beta_n < 120 \leqq \gamma_n,$$

d. h. im R_{n+1} können um einen gemeinschaftlichen Grenzraum R_{n-2} herum einerseits vier A_n, andererseits drei B_n Platz finden, oder aber:

„Im R_{n+1} kann man aus den Polytopen A_n, B_n, C_n des R_n wieder drei reguläre Polytope höherer Dimensionenzahl bilden, nämlich A_{n+1}, C_{n+1} aus A_n und B_{n+1} aus B_n."

Weil nun die kleine Tabelle der vorhergehenden Nummer zeigt, daß Z_{24} nur zu einer regulären Raumausfüllung führt und die Winkel ω bei Z_{120} und Z_{600} größer als 120^0 sind, so finden sich im R_5 außer A_5, B_5, C_5 keine andere reguläre Polytope vor und ist also bewiesen, daß es für $n > 4$ nur drei reguläre Polytope A_n, B_n, C_n geben kann.

Es enthält die folgende Tabelle die sämtlichen Ergebnisse



in der Form eines Stammbaumes. Darin bedeuten die Zahlen 0, 1 ... rechts die Dimensionen der tragenden Räume, während die oberhalb der Zahlen beigefügten horizontalen Striche angeben, daß der entsprechende Körper imstande ist, seinen Raum ganz auszufüllen. Außerdem beziehen die kleinen Sternchen sich auf hemiedrische oder hemigone Formen.

81. Allgemeine Eigenschaften. Hauptstrahlen. Um-, An- und Inradien. Maß- und Winkelverhältnisse. Für die totale Begrenzung der drei regulären Polytope A_n, B_n, C_n findet man die dem Eulerschen Satze Genüge leistenden Resultate

$$\left.\begin{array}{lllll} A_n \ldots & (n+1)_1 A_{n-1}, & (n+1)_2 A_{n-2}, & (n+1)_3 A_{n-3}, \ldots, & \\ & & (n+1)_2 A_1, & (n+1)_1 A_0 & \\ B_n \ldots & 2(n)_1 B_{n-1}, & 2^2 (n)_2 B_{n-2}, & 2^3 (n)_3 B_{n-3}, \ldots, & \\ & & 2^{n-1}(n)_1 B_1, & 2^n B_0 & \\ C_n \ldots & 2^n C_{n-1}, & 2^{n-1}(n)_1 C_{n-2}, & 2^{n-2}(n)_2 C_{n-3}, \ldots, & \\ & & 2^2 (n)_2 C_1, & 2(n)_1 C_0 & \end{array}\right\},$$

wo A_0, B_0, C_0 wieder Punkte sind.

Man findet nacheinander leicht die Ergebnisse der folgenden kleinen Tabelle, wo $\varrho_{n,p}$ den Radius des die p-dimensionalen Grenzelemente berührenden Kugelraumes, ω den Winkel zwischen zwei benachbarten Grenzräumen R_{n-1} und I und O den n-dimensionalen Inhalt und die $(n-1)$-dimensionale Oberfläche, in der Kantenlänge als Längeneinheit, bezeichnen.

	$\varrho^2_{n,p}$	$\operatorname{tang}^2 \frac{\omega}{2}$	I	O
A_n	$\frac{n-p}{2(n+1)(p+1)}$	$\frac{n-1}{n+1}$	$\frac{1}{n!}\sqrt{\frac{n+1}{2^n}}$	$\frac{n}{(n-1)!}\sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}}$
B_n	$\frac{1}{4}(n-p)$	1	1	$2n$
C_n	$\frac{1}{2(p+1)}$	$n-1$	$\frac{1}{n!}\sqrt{2^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}\sqrt{n \cdot 2^{n+1}}$

82. Die einfachsten Koordinatenstellungen. Für einen willkürlichen Wert der Dimensionenzahl n werden die

Koordinaten der regulären Polytope A_n, B_n, C_n nur dann einfach dargestellt, wenn man beim A_n das A_n selbst zum Koordinatensimplex wählt, bei B_n und C_n aber rechtwinklige Koordinaten anwendet.

So bilden die normalen Abstandskoordinaten der $n+1$ Eckpunkte P_i des $A_n^{(1)}$ mit der Einheit als Kantenlänge in Zeilen $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_{n+1}^{(i)}$ untereinander geschrieben eine Determinante, für welche die Elemente der Hauptdiagonale sämtlich den Wert $\sqrt{\frac{n+1}{2n}}$ haben, während alle anderen Elemente verschwinden. Hieraus erhält man die Koordinaten der Kantenmitten, der Flächenmittelpunkte, usw. durch Bildung des arithmetischen Mittels der entsprechenden Koordinaten der Ecken zu je zwei, zu je drei, usw.

Nimmt man beim $B_n^{(1)}$ die durch den Mittelpunkt O zu den n Kantensystemen parallel gezogenen Geraden als Achsen an, so sind die Koordinaten der 2^n Eckpunkte sämtlich

$$(\pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}, \ldots, \pm\tfrac{1}{2}),$$

wobei alle Zeichenkombinationen eintreten. Nimmt man beim $C_n^{(1)}$ die n Diagonalen als Achsen an, so ergibt sich — fast wie oben — eine Determinante, hier vom n-ten Grade, in welcher die Elemente der Hauptdiagonale sämtlich den Wert $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$ haben und alle übrigen Elemente verschwinden.

Weil es hier beschwerlich ist, die verschiedenen Hauptstrahlen als OE_0, OK_0, OF_0, ... voneinander zu unterscheiden, führen wir jetzt die allgemeinere Bezeichnungsweise OS_0, OS_1, OS_2, ... ein. Es ist dann allgemein OS_k ein Hauptstrahl, welcher O mit dem Mittelpunkte eines Grenzelementes von k Dimensionen verbindet. Es ist dann beim A_n jeder OS_k zu gleicher Zeit ein OS_{n-k-1}. Oben ist B_n in der Koordinatenstellung OS_{n-1}, C_n in der Koordinatenstellung OS_0 gegeben.

Wir lassen hier die übrigen möglichen Koordinatenstellungen unberücksichtigt und berühren nur noch die Frage, ob es möglich ist beim B_n ein rechtwinkliges Koordinatensystem von lauter Achsen OS_0 zu erhalten. Dies ist möglich für $n=2$, nicht möglich für $n=3$, möglich für $n=4$, nicht möglich für $n=5$, ... Was ist das allgemeine Gesetz? Man findet leicht, daß es nur möglich ist für $n=2^p$.

83. Projektionen und Schnitte der regulären Polytope. Wir beschränken uns wieder auf die Betrachtung von Projektions- und Schnitträumen senkrecht zu einem Hauptstrahle, wobei angenommen werden mag, daß der Projektionsraum den Mittelpunkt O des Polytopes enthält.

Sei $A_n^{(1)}$ das Polytop und $OS_k = OS_{n-k-1}$ der gewählte Hauptstrahl. Dann ist der Projektionsraum durch O parallel zu den Räumen, welche die Begrenzungselemente mit den Mittelpunkten S_k und S_{n-k-1} tragen. Sind R_k und R_{n-k-1} die diesen Räumen parallelen Räume des Projektionsraumes durch O, und $A_k^{(1)}$, $A_{n-k-1}^{(1)}$ in R_k, R_{n-k-1} die Projektionen beider einander gegenüberliegender Elemente, so ist die Projektion des $A_n^{(1)}$ aus diesen gleichmittelpunktigen, in zueinander senkrechten Räumen liegenden Simplexen $A_k^{(1)}$, $A_{n-k-1}^{(1)}$ abzuleiten, indem man die Grenzelemente $A_p^{(1)}$ von $A_k^{(1)}$ mit den Grenzelementen $A_q^{(1)}$ von $A_{n-k-1}^{(1)}$ zu neuen Grenzelementen $A_{p+q+1}^{(1)}$ verbindet.

Die Schnitte des $A_n^{(1)}$ mit einem Raume R_{n-1} senkrecht zu OS_k sind Simplotope $S_t(k+1, n-k)$; die beiden erzeugenden Polytope A_k und A_{n-k-1} sind hier regulär und liegen in zueinander senkrechten Räumen. Bewegt der Schnittraum sich parallel zu sich selbst, so ändert sich das Schnittsimplotop mit dem Anfangszustand $A_k^{(1)}$ und dem Endzustand $A_{n-k-1}^{(1)}$, indem von den erzeugenden Simplexen A_k abnimmt von $A_k^{(1)}$ bis $A_k^{(0)}$, hingegen A_{n-k-1} wächst von $A_{n-k-1}^{(0)}$ bis $A_{n-k-1}^{(1)}$.

Aufgabe 81. Bestimme die Größenverhältnisse der das Simplotop erzeugenden Simplexe, wenn der Schnittraum das Segment S_kS_{n-k-1} des Hauptstrahles in zwei Stücke S_kS, SS_{n-k-1} zerlegt, welche sich verhalten wie a, b.

[Man findet für die erzeugenden Simplexe

$$A_k^{\left(\frac{b}{a+b}\right)}, \quad A_{n-k-1}^{\left(\frac{a}{a+b}\right)}].$$

Bei B_n und C_n beschränken wir uns auf Projektions- und Schnitträume, welche entweder zu OS_0 oder zu OS_{n-1} senkrecht sind.

Die Projektion von $B_n^{(1)}$ auf einen R_{n-1} senkrecht zu OS_{n-1} ist selbstverständlich ein $B_{n-1}^{(1)}$, und desgleichen der Schnitt mit diesem sich parallel zu sich selbst bewegenden

Raume, sowie auch das hier unveränderliche, nur erscheinende und verschwindende Transformationsbild.

Bei der Behandlung von Projektion und Schnitt des $B_n^{(1)}$ auf und mit Räumen R_{n-1} senkrecht zu OS_0 beachten wir zunächst die Schichtung

$$1A,\ (n)_1 B,\ (n)_2 C,\ \ldots,\ (n)_1 B',\ 1A'$$

der Ecken und zeigen, daß die zu AA' senkrechten Räume R_{n-1} durch die Punktgruppen $(n)_1 B$, $(n)_2 C, \ldots, (n)_1 B'$ die Mittelpunktsdiagonale AA' in n gleiche Teile zerlegen. Nennt man $(n)_1 B$ die erste, $(n)_2 C$ die zweite Schicht, usw. und ist P ein Eckpunkt der k-ten Schicht und P_0 seine Projektion auf AA', so hat man im rechtwinkligen Dreiecke APA', wo PP_0 das aus dem Eckpunkte des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Lot darstellt, unmittelbar

$$AP_0 = \frac{AP^2}{AA'} = \frac{k}{\sqrt{n}} = \frac{k}{n}\sqrt{n} = \frac{k}{n} \cdot AA',$$

was die Behauptung beweist. Weiter findet man in

$$PP_0 = \sqrt{AP_0 \cdot A'P_0} = \sqrt{\frac{k\,(n-k)}{n}}$$

den Umradius des Systems der in der k-ten Schicht liegenden Punktgruppe. Was nun diese Punktgruppen selbst anbetrifft, so enthält die erste Schicht ein $A_{n-1}^{(\sqrt{2})}$, während die Punktgruppen der zweiten, dritten, ... Schicht erhalten werden, indem man die Hauptstrahlen $O'S_1$, $O'S_2$, ... dieses $A_{n-1}^{(\sqrt{2})}$ vom Mittelpunkte O' dieses Polytops aus der Reihe nach mit 2, 3, ... multipliziert und nachher die Systeme der neuen Eckpunkte in der Richtung AA' verschiebt, der Reihe nach über einen Abstand $\frac{1}{n}\sqrt{n}$, $\frac{2}{n}\sqrt{n}, \ldots$; wobei sich auf der andern Seite des Mittelpunktes O die verschiedenen Schichten in umgekehrter Reihenfolge und mit entgegengesetzter Orientierung wiederholen. Wir bemerken nun noch zweierlei. Zunächst, daß die Kanten des $B_n^{(1)}$ immer zwei Punkte zweier unmittelbar benachbarter Schichten verbinden und zwar derart, daß A mit den n Punkten B, jeder Punkt B mit A und $n-1$ Punkten C, jeder Punkt C mit zwei Punkten B und $n-2$ Punkten D, usw. verbunden

erscheint; woraus hervorgeht, daß das Transformationsbild zwischen der ersten und zweiten Schicht $2(n)_2$, zwischen der zweiten und dritten Schicht $3(n)_3$, usw. Eckpunkte aufweist. Und zweitens, daß die Projektion — vergleiche Nr. 72 b für $n=4$ — ein Polytop ist mit $2(2^{n-1}-1)$ Ecken und allgemein $2(^{n-p-1}-1)$ parallelotopförmigen Grenzräumen R_p, während der entsprechende Hauptschnitt ein Polytop ist mit $\frac{n!}{(m!)^2}$ Eckpunkten oder $\frac{n!}{(m-1!)^2}$ Kantenmitten von $B_n^{(1)}$ als Ecken, je nachdem $n=2m$ oder $n=2m-1$ ist.

Bei $C_n^{(1)}$ ist die Projektion in der Richtung eines OS_0 offenbar ein $C_{n-1}^{(1)}$ mit seinem doppelt gezählten Mittelpunkt, und die Reihe der Schnitte senkrecht zu OS_0 ein sich von $C_{n-1}^{(0)}$ bis $C_{n-1}^{(1)}$ vergrößerndes und wieder zu $C_{n-1}^{(0)}$ verkleinerndes C_{n-1}. Und die Projektion in der Richtung OS_{n-1} wird erhalten, indem man um O zwei entgegengesetzt orientierte gleichmittelpunktige Polytope $A_{n-1}^{(1)}$ legt und die Ecken des einen mit den ungleichnamigen Ecken des andern verbindet, während das Transformationsbild entsteht, wenn man eines dieser $A_{n-1}^{(1)}$ durch Räume R_{n-1} parallel zu den Grenzräumen an den Ecken regelmäßig abstumpft bis auf die Hälfte der Kanten (zwei entgegengesetzte $A_{n-1}^{(1)}$ im Gleichgewichte), und von diesem Mittelschnitte aus mit Verwechselung der beiden $A_n^{(1)}$ den Rückweg antritt. Wir bemerken, daß das C_n in letzterer Stellung das einfachste Prismoid des Raumes R_n bildet, und man es hier also mit dem Transformationsbild des einfachsten Prismoids zu tun hat.

84. Bestimmung der regulären Polytope durch reguläre Projektionen. Die bis jetzt betrachteten Projektionen der regulären Polytope zeigten, in Verbindung mit dem Umstande, daß die Richtung der senkrechten Projektion mit derjenigen eines Hauptstrahles zusammenfällt, eine gewisse Regelmäßigkeit; allein regulär waren die Projektionen nur ausnahmsweise, wie beim B_n im ersten der zwei betrachteten Fälle. Wir beweisen jetzt, daß es allgemein möglich ist, die in den Räumen R_5, R_6, ... auftretenden regulären Polytope mittels regulärer Projektionen zu bestimmen, dabei die Definition der regulären Projektionen so streng wie immer möglich auffassend, d. h. die Projektion des Würfels als reguläres Hexagon mit doppelt gezähltem Mittelpunkt z. B.

als nicht-regulär betrachtend. Weil das $B_n^{(1)}$ sich auf den Raum R_{n-k} eines $(n-k)$-dimensionalen Grenzraumes als ein $B_{n-k}^{(1)}$ projiziert — und sich hieraus unmittelbar entnehmen läßt, wie das B_n mittels regulärer Projektionen bestimmt werden kann —, so beschränken wir uns weiter auf die Reihen A_n und C_n. Die folgenden einfachen Beispiele mögen zunächst unsern Zweck deutlicher hervortreten lassen:

„Beschreibt man in den Koordinatenebenen $O(X_1 X_2)$, $O(X_3 X_4)$ eines rechtwinkligen Systems des R_4 in Kreisen mit dem Radius ϱ reguläre Fünfecke $(0,1,2,3,4)$, $(0',1',2',3',4')$ — oder Achtecke $(0, 1, \ldots, 7)$, $(0', 1', \ldots, 7')$ — verschiedener Art, so sind die fünf — oder acht — Punkte P_i des R_4 mit den Projektionen (i, i') die Eckpunkte eines $A_4^{(\varrho\sqrt{5})}$ — oder $C_4^{(2\varrho)}$."

Im ersten Falle ist der Abstand irgend zweier Punkte P_i, P_k die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, welche immer wieder eine Seite und eine Diagonale eines nämlichen regulären Fünfecks zu Katheten hat, und findet man somit für jedes Wertsystem von i und k

$$P_i P_k^2 = \left(\tfrac{1}{2}\varrho\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\varrho\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)^2 = 5\varrho^2.$$

Im zweiten Falle erhält man, ebenfalls mittels rechtwinkliger Dreiecke, für P_0P_4, P_1P_5, P_2P_6, P_3P_7 den gemeinschaftlichen Wert $2\varrho\sqrt{2}$ und für alle andern Segmente P_iP_k den Wert 2ϱ.

Bevor wir zum allgemeinen Falle schreiten, leiten wir aus einem allgemeinen Satze Schläflis zwei Hilfssätze ab.

Der Schläflische Satz (vergleiche „Theorie der vielfachen Kontinuität," S. 138) lautet:

„Wenn in der n-fachen Totalität mehrere (mehr als zwei) von einem gemeinschaftlichen Zentrum ausgehende Strahlen, welche die Einheit zur Länge haben, auf reguläre Art geordnet sind, und man projiziert sie auf irgend eine Richtung, so ist 1. die Summe aller Projektionen gleich null, 2. das arithmetische Mittel der Quadrate dieser Projektionen gleich $\frac{1}{n}$."

[Beiläufig bemerken wir, daß dieser Satz allgemein gilt, wenn man die Endpunkte der Strahlen ersetzt durch irgend

eine Massenverteilung über die $(n-1)$-dimensionale „Oberfläche“ eines n-dimensionalen Kugelraumes mit der Einheit als Radius, für welche der Schwerpunkt in den Mittelpunkt O fällt und der quadratische Trägheitsraum ein Kugelraum ist. Gelten nämlich in bezug auf irgend ein rechtwinkliges System mit O als Ursprung die Bedingungen

$$\Sigma m x_1 = 0,\ \Sigma m x_2 = 0, \ldots, \Sigma m x_n = 0;$$
$$\Sigma m x_1 x_2 = 0,\ \Sigma m x_1 x_3 = 0, \ldots, \Sigma m x_{n-1} x_n = 0;$$
$$\Sigma m x_1^2 = \Sigma m x_2^2 = \ldots = \Sigma m x_n^2 = A,$$

so ergibt sich, weil $\Sigma m r^2 = \Sigma m = M$ ist, $\Sigma m x_1^2 = \frac{1}{n} M$.

Offenbar sind die angegebenen Bedingungen bei allen regulären Polytopen erfüllt, auch beim A_n; es muß nämlich der Schwerpunktträgheitsraum des A_n ein Kugelraum sein, weil dieser quadratische Raum wenigstens $n+1$ nicht in einem R_{n-1} liegende Hauptachsen hat.]

Durch Betrachtung der Dreiecke AOP, welche irgend einen gegebenen Punkt A von R_n mit den Mittelpunktsvektoren OP der Ecken P des Polytopes verbinden, findet man mittels des ersten Teiles des Schläflischen Satzes:

„Die Summe der Quadrate der Abstände der e Ecken eines regulären Polytopes von irgend einem Punkte A seines Raumes R_n ist $e(r^2 + a^2)$, wo r der Radius des Umkugelraumes und a die Entfernung OA des Punktes A vom Mittelpunkte O des Polytopes ist.“

Für $n = 2$ ist obiger Satz sehr bekannt. Hier brauchen wir nur den ganz besonderen Fall, wo A mit einem der Polygoneckpunkte P_0 zusammenfällt. Diesem Hilfssatze geben wir Ausdruck in folgender Gleichung

$$\sum_k P_0 P_k^2 = 2 e \varrho^2, \tag{57}$$

wo e die Zahl der Eckpunkte und ϱ der Umradius des Polygons ist.

Wendet man den zweiten Teil des Schläflischen Satzes nacheinander auf die Achsen eines rechtwinkligen Systems irgend eines im R_n liegenden Raumes $R_{n'}$ an, so ergibt sich durch Addition:

„Projiziert man die Mittelpunktsvektoren MP_k der Ecken P_k eines regulären Polytopes des R_n auf einen im R_n enthaltenen $R_{n'}$, so ist die Summe der Quadrate der Projektionen $\frac{n'}{n} e r^2$, wo e wieder die Zahl der Ecken, r der Umradius ist."

Ist die Projektion auf $R_{n'}$ regulär, so ist der Umradius r' der Projektion also durch die Beziehung

$$r'^2 = \frac{n'}{n} r^2 \tag{58}$$

mit r verknüpft. Von diesem zweiten Hilfssatze hat man besonders die Fälle $n' = 2$ und $n' = 1$ zu benützen; deshalb heben wir folgendes noch absichtlich hervor:

„Projiziert sich ein reguläres Polytop auf eine Ebene als reguläres Polygon mit Umradius ϱ_2, und auf eine Gerade als zwei gleich zahlreiche Punktgruppen mit der Entfernung ϱ_1, so gilt die Beziehung

$$\varrho_1 = \varrho_2 \sqrt{2}\text{"} . \tag{59}$$

Es ist dann nämlich ϱ_1 das Doppelte des Umradius der linearen Projektion.

Es gelten nun die zwei allgemeinen Theoreme:

Theorem I.

„Sei m die Hälfte von n oder, wenn n ungerade und $= 2\nu + 1$ ist, $= \nu$."

„Konstruiere in m willkürlich gewählten Ebenen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ kongruente reguläre Vielecke $V_1, V_2, \ldots, V_m$ mit $n + 1$ [oder $2n$] Seiten; sei ϱ der Umradius dieser Vielecke."

„Nimm in bezug auf jedes dieser Vielecke unter den Ecken einen Nullpunkt 0 an und einen Sinn, in welchem die Abstände der übrigen Ecken vom Nullpunkte dem Umriß entlang positiv gezählt werden."

„Belege diese übrigen Ecken mit den Nummern $1, 2, 3, \ldots, n + 1$ [oder $1, 2, 3, \ldots, 2n$] und zwar so daß die Ecke, welche im α_k im positiven Sinne dem Umrisse von V_k entlang vom Nullpunkte eine Entfernung von kp [oder $(2k - 1)p$] Vielecksseiten — oder irgend eine

Anzahl ganzer Umläufe weniger — hat, die Nummer p trägt. Dabei bilden die in α_k der Reihe nach mit $0, 1, 2, \ldots$ bezeichneten Punkte im allgemeinen die Ecken eines regulären Vielecks höherer Art mit $n+1$ [oder $2n$] Seiten, und tritt ausnahmsweise — wenn k und $n+1$ [oder $2k-1$ und $2n$] den größten gemeinsamen Teiler q zulassen — der Umstand ein, daß das Vieleck sich mit Rücksicht auf seine Numerierung auf ein reguläres Vieleck mit $\frac{n+1}{q}$ [oder $\frac{2n}{q}$] Seiten reduziert, wobei jede Ecke q Nummern trägt; ja, bei ungeradem n enthält α_m ein sich in dieser Hinsicht zu einem Zweiecke abplattendes Vieleck, welches an seinem einen Endpunkte nur gerade Nummern $0, 2, \ldots$, an seinem andern Endpunkte nur ungerade Nummern $1, 3, \ldots$ trägt."

„Ersetze im Falle eines ungeraden n letzteres Segment von der Länge 2ϱ durch ein auf gleiche Weise mit den Nummergruppen $(0, 2, 4, \ldots)$, $(1, 3, 5, \ldots)$ behaftetes Segment von der Länge $\varrho\sqrt{2}$."

„Stelle die m linearen Gebilde α_k — d. h. bei geradem n die m Ebenen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ und bei ungeradem n die $m-1$ Ebenen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ und die Achse des Segmentes $\varrho\sqrt{2}$ — mit den in ihnen enthaltenen numerierten Punkten, so im R_n auf, daß irgend zwei derselben senkrecht aufeinander stehen."

„Dann sind die Punkte von R_n, welche sich auf diese m Gebilde in die gleichnumerierten Punkte projizieren, die Eckpunkte eines $A_n^{(\varrho\sqrt{n+1})}$ [oder $C_n^{(\varrho\sqrt{n})}$]."

Theorem II.

„Seien R_{m-1} und R_m zwei in einem Punkte eines Raumes R_{2m-1} zueinander senkrechte Räume."

„Nimm im R_{m-1} ein reguläres $A_{m-1}^{(1)}$, im R_m ein reguläres $C_m^{(1)}$ an."

„Belege die m Ecken des $A_{m-1}^{(1)}$ mit den Nummerpaaren $(0, m)$, $(1, m+1), \ldots, (m-1, 2m-1)$ und verteile die Nummern $0, 1, \ldots, 2m-1$ in der Weise über die $2m$ Ecken des $C_m^{(1)}$, daß jede Ecke eine Nummer und jede der m Diagonalen eines der m Paare $(0, m)$, $(1, m+1), \ldots, (m-1, 2m-1)$ trägt."

„Dann sind die Punkte von R_{2m-1}, welche sich auf

R_{m-1} und R_m in die gleichnumerierten Punkte projizieren, die Eckpunkte eines $A_{2m-1}^{(\sqrt{2})}$, welches sich auf R_{m-1} als das doppelt gezählte $A_{m-1}^{(1)}$ und auf R_m als das $C_m^{(1)}$ projiziert."

Für den auf den obigen Gleichungen sich basierenden Beweis beider Theoreme verweisen wir auf eine kleine Sonderarbeit: „Les projections régulières des polytopes réguliers" (*Archives du Musée Teyler*, Teil 9, S. 201—215).

Das Theorem I ist wichtig für die Zerlegung der den regulären Polytopen A_n und C_n entsprechenden Gruppen von Transformationen in sich; denn alle Drehungen der regulären vieleckigen Projektionen, welche diese in sich projizieren, sind in den Polytopengruppen enthalten.

Durch wiederholte Anwendung des Theorems II findet man noch den Satz:

„Es ist möglich im Raume R_{2^q-1} eines $A_{2^q-1}^{(\sqrt{2^{q-1}})}$ die Räume R_{2^q-1}, R_{2^q-2}, ..., R_4, R_2 und R_1 zu je zwei und zwei senkrecht zueinander derart zu wählen, daß das gegebene $A_{2^q-1}^{(\sqrt{2^{q-1}})}$ sich auf diese Räume der Reihe nach als ein $C_{2^q-1}^{(\sqrt{2^{q-3}})}$, ein doppelt gezähltes $C_{2^q-2}^{(\sqrt{2^{q-4}})}$, ..., ein 2^{q-3}-fach gezähltes $C_4^{(\sqrt{2})}$, ein 2^{q-2}-fach gezähltes $C_2^{(1)}$ und ein 2^{q-1}-fach gezähltes $C_1^{(1)}$ projiziert."

Wahrscheinlich steht folgender Satz in seiner Art ganz vereinzelt da:

„Beschreibt man in zwei zueinander senkrechten dreidimensionalen Räumen R_3, R_3' eines R_6 zwei kongruente Ikosaeder mit ϱ als Umradius, und belegt die Eckpunkte mit den Nummern

$$(0, 1, 2, \ldots, 11), \quad (0', 1', 2', \ldots, 11')$$

in der Weise, daß

1. den dreißig Kanten $(0, 1)$, $(0, 2)$, ... des ersten die Diagonalen $(0', 1')$, $(0', 2')$, ... gleicher Länge des zweiten entsprechen, für welche die allgemeine Beziehung $(0, 1)^2 + (0', 1')^2 = 4\varrho^2$ gilt,

2. umgekehrt den dreißig Kanten $(0', 7')$, $(0', 8')$, ... des zweiten die Diagonalen $(0, 7)$, $(0, 8)$, ... gleicher Länge des ersten entsprechen, für welche $(0, 7)^2 + (0'7')^2$ immer wieder den Wert $4\varrho^2$ hat, und

3. die sechs Mittelpunktsdiagonalen $(0', 6')$, $(1', 7')$, ... des zweiten den sechs Mittelpunktsdiagonalen $(0, 6)$, $(1, 7)$, ... des ersten entsprechen,

so sind die zwölf Punkte P_i von R_6, welche sich auf R_3, R'_3 in die gleichnumerierten Punkte i, i' projizieren, die Eckpunkte eines $C_6^{(2\varrho)}$.«

Denn man findet $2\varrho\sqrt{2}$ für die Länge der sechs Segmente P_0P_6, P_1P_7, ... und 2ϱ für die Länge aller übrigen Segmente.

85. Die regulären Polytope und die Gruppentheorie, Symmetrieräume. Erweiterte Gruppen. Es ist die Orientierung eines regulären n-dimensionalen Polytopes $A_1A_2A_3A_4\ldots$ in bezug auf die gegebene Lage $P_1P_2P_3P_4\ldots$ bestimmt, sobald man weiß, welche Ecke A_1, welche Kante A_1A_2 durch A_1, welche Fläche $A_1A_2A_3$ durch A_1A_2, ..., welcher Grenzraum $G_{n-2}(A_1A_2\ldots A_{n-1})$ durch den Grenzraum $G_{n-3}(A_1A_2\ldots A_{n-2})$ der Reihe nach mit P_1, P_1P_2, $P_1P_2P_3$, .. und $G_{n-2}(P_1P_2\ldots P_{n-1})$ zusammenfallen soll. Deutet allgemein — wie früher bei der Ableitung des Eulerschen Satzes — r_k die Zahl der k-dimensionalen Grenzräume G_k an und versinnlicht $r_{k,l}$, je nachdem $k > l$ oder $k < l$ ist, die Zahl der Grenzräume G_k *durch* einen oder *in* einem G_l, so ist also der gesuchte Grad das Produkt der Zahlen r_0, $r_{1,0}$, $r_{2,1}$, ..., $r_{n-3,n-4}$, $r_{n-2,n-3}$.

Mittels der Identitäten:

$$\left.\begin{array}{c} r_0 r_{1,0} = r_1 r_{0,1} \\ r_1 r_{2,1} = r_2 r_{1,2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{n-3} r_{n-2,n-3} = r_{n-2} r_{n-3,n-2} \end{array}\right\}$$

erhält man durch Multiplikation

$$r_0 r_{1,0} r_{2,1} \ldots r_{n-2,n-3} = r_{0,1} r_{1,2} \ldots r_{n-3,n-2} r_{n-2}.$$

Nun ist aber

$$r_{0,1} r_{1,2} \ldots r_{n-3,n-2} = (n-2)!\, r_{0,n-2}.$$

Also ist der gesuchte Grad durch $(n-2)!\, r_{0,n-2} r_{n-2}$ dargestellt, d. h.

Der Grad der Gruppe eines n-dimensionalen Polytopes ist $(n-2)!$-mal die Zahl, welche angibt, wie oft eine Ecke in einem Grenzraume R_{n-2} liegt.

So findet man beim

$$\left.\begin{array}{lll} A_n \ldots (n-2)! \cdot (n-1) \cdot & \dfrac{n(n+1)}{2} & = \frac{1}{2}(n+1)! \\ B_n \ldots (n-2)! \cdot 2^{n-2} \cdot & 2n(n-1) & = 2^{n-1}n! \\ C_n \ldots (n-2)! \cdot (n-1) \cdot & n2^{n-1} & = 2^{n-1}n! \end{array}\right\}.$$

Wird Spiegelung in bezug auf einen $(n-1)$-dimensionalen Symmetrieraum zugelassen, und also die Gruppe der anallagmatischen Bewegungen zur Gruppe der Transformationen in sich erweitert, so werden obige Zahlen mit zwei multipliziert.

Aufgabe 82. Beweise, daß die Bewegungsgruppe des A_n isomorph ist mit der Gruppe der geraden Vertauschungen von $n+1$ Elementen.

Bei A_n steht irgend ein Symmetrieraum R_{n-1} senkrecht auf einer Kante in ihrer Mitte. Und bei B_n (C_n) steht irgend ein Symmetrieraum R_{n-1} im Mittelpunkte senkrecht auf einem Hauptstrahle $OS_1, OS_2, \ldots, OS_n$ ($OS_{n-1}, OS_{n-2}, \ldots, OS_0$). Also ist $(n+1)_2$ die Zahl der Symmetrieräume des A_n, und findet man bei B_n und C_n

$$(n)_1 + 2(n)_2 + 4(n)_3 + \ldots + 2^{n-3}(n)_2 + 2^{n-2}(n)_1,$$

was sich auf $\frac{1}{2}(3^n - 2^n - 1)$ reduziert.

86. Die Kristallformen des regulären Systems. Hemiedrie. Kristallkombinationen. Eine Kristallform des regulären Systems im R_n kann durch das Symbol $(1, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ bezeichnet werden, wo $1, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ die nach steigender Größe abgezählten Segmente sind, welche durch die Grenzräume R_{n-1} von den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems abgeschnitten werden.

Leiten wir aus dem Symbole $(1, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ einer Kristallform im R_{n-1} eine Form im R_n ab durch Hinzufügung von a_{n-1}, so sind zwei Fälle zu unterscheiden: entweder a_{n-2} ist schon unendlich und dann muß a^{n-1} es auch sein; oder a_{n-2} ist endlich und dann kann für a_{n-1} der Wert von a_{n-2} oder ein größerer endlicher Wert oder

unendlich gewählt werden. Wird allgemein im R_p die Zahl der Formen mit endlichem a_{p-1} durch x_p, die Zahl der Formen mit unendlichem a_{p-1} durch y_p bezeichnet, so hat man also die rekurrenten Beziehungen

$$x_p = 2\,x_{p-1}, \quad y_p = x_{p-1} + y_{p-1}$$

und deshalb auch

$$x_p - y_p = x_{p-1} - y_{p-1},$$

d. h. in Verbindung mit den Anfangswerten $x_2 = 2$, $y_2 = 1$

$$x_n = 2^{n-1}, \quad y_n = 2^{n-1} - 1, \quad x_n + y_n = 2^n - 1.$$

Wir betrachten jetzt den Hauptkristall $(1, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, aus welchem alle übrigen abgeleitet werden. Die bei ihm auftretenden Anzahlen von Grenzräumen verschiedener Dimensionenzahl werden am leichtesten von der Punktseite aus beherrscht. Unterscheidet man die Eckpunkte nach der Anzahl k ihrer nicht verschwindenden, dem absoluten Werte nach gleichen Koordinaten, so gibt es offenbar — vergleiche die Koordinatenwerte — $2^k(n)_k$ Eckpunkte P_k, was im ganzen zu $(1+2)^n - 1$ oder $3^n - 1$ Eckpunkten führt. Weiter ergibt sich — ebenfalls durch Betrachtung der Koordinatenwerte —, daß durch irgend einen Punkt P_k entweder $(k)_l$ oder aber $2^{l-k}(n-k)_{l-k}$ Kanten $P_k P_l$ gehen, je nachdem k größer oder kleiner als l ist. Deshalb gehen durch einen Eckpunkt

$$\begin{aligned}
P_1 \ldots\ & 2(n-1)_1 + 2^2(n-1)_2 + 2^3(n-1)_3 + 2^4(n-1)_4 + \ldots \\
& \qquad + 2^{n-1} = 3^{n-1} - 3 + 2 \\
P_2 \ldots\ & 2 + 2(n-2)_1 + 2^2(n-2)_2 + 2^3(n-2)_3 + \ldots \\
& \qquad + 2^{n-2} = 3^{n-2} - 3 + 2^2 \\
P_3 \ldots\ & 3 + 3 + 2(n-3)_1 + 2^2(n-3)_2 + \ldots \\
& \qquad + 2^{n-3} = 3^{n-3} - 3 + 2^3 \\
P_4 \ldots\ & 4 + 6 + 4 + 2(n-4)_1 + \ldots \\
& \qquad + 2^{n-4} = 3^{n-4} - 3 + 2^4
\end{aligned}$$

und somit allgemein durch einen Eckpunkt P_k eine Anzahl von $3^{n-k} - 3 + 2^k$ Kanten. Deshalb ist die Kantenzahl

$$\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(3^{n-k} - 3 + 2^k)\,2^k(n)_k,$$

was sich auf $5^n - 2 \cdot 3^n + 1$ reduziert. Und nun liegt die Vermutung nahe, daß $7^n - 3 \cdot 5^n + 3 \cdot 3^n - 1$ die Flächen-

zahl sein wird und dass die anderen Zahlen $r_3, r_4, \ldots$ sich durch weiteren Aufbau dieser Formel bestimmen lassen. Wir verzichten darauf hier die Richtigkeit dieses allgemeinen Resultates darzutun.

Unter den $2^n - 1$ Kristallformen des regulären Systems sind nur zwei reguläre enthalten, nämlich $(1, 1, \ldots, 1) = C_n^{(\sqrt{2})}$ und $(1, \infty, \ldots, \infty) = B_n^{(2)}$.

Für die drei Arten von Hemiedrie verweisen wir auf unsere früheren Entwicklungen.

Natürlich können auch Kombinationen der Kristallformen des regulären Systems betrachtet werden. Anstatt hierauf näher einzugehen, beschränken wir uns — zu den regulären Polytopen zurückkehrend — auf die Frage, durch welche Formen die drei Polytope A_n, B_n, C_n an Ecken, Kanten, Flächen, usw. regelmäßig abgestumpft werden. Die Antwort ist allgemein und einfach diese: die abstumpfende Form wird eingeschlossen von Räumen R_{n-1}, welche in gegebenem Abstande vom Mittelpunkte des Polytopes auf der Seite OS_k der betreffenden Hauptachsen auf diesen senkrecht stehen, und ist also polar-reziprok zum Polytope, welches die Endpunkte S_k dieser Hauptstrahlen zu Eckpunkten hat. Für das A_n sind wir schon (83) auf die polar-reziproken Polytope der abstumpfenden Formen gestoßen bei der OS_0-Schichtung des B_n. Und für das B_n und C_n sind es die Kristallformen, deren Symbole nur aus Einheiten und Unendlichkeiten bestehen, welche das gefragte liefern. So stumpft die Kristallform $(\overbrace{1, 1, \ldots, 1}^{k}, \overbrace{\infty, \infty, \ldots, \infty}^{n-k})$ bei B_n die $(n-k)$-dimensionalen, bei C_n die k-dimensionalen Grenzräume ab.

Die Kristalle $(\overbrace{1, 1, \ldots, 1}^{k}, \overbrace{\infty, \infty, \ldots, \infty}^{n-k})$, welche wir kurz als $K_{k,n-k}$ andeuten wollen, legen eine Brücke zwischen den regulären Polytopen $B_n = K_{1,n-1}$ und $C_n = K_{n,0}$; die Zwischenglieder sind den Eckpunkten nach dann auch wirklich als Kombinationen der Polytope B_n, C_n anzusehen. Es wird nämlich $K_{k,n-k}$ begrenzt von Räumen R_{n-1} mit der Gleichungsform $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 1$, welche zusammen die $2n$ Ecken des $C_n^{(1)}$ und die 2^n Ecken $\left(\pm\frac{1}{k}, \pm\frac{1}{k}, \ldots, \pm\frac{1}{k}\right)$ eines $B_n^{\left(\frac{2}{k}\right)}$ enthalten. Und ein bestimmter Grenzraum R_{n-1},

z. B. $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 1$, enthält die k Ecken C des $C_n^{(1)}$, für welche nacheinander $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $\ldots$, $x_k = 1$ die einzigen von null verschiedenen Koordinaten sind, und die 2^{n-k} Ecken B des $B_n^{\left(\frac{2}{k}\right)}$ mit den Koordinaten

$$\left(\overbrace{\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}}^{k}, \overbrace{\pm\frac{1}{k}, \pm\frac{1}{k}, \ldots, \pm\frac{1}{k}}^{n-k}\right).$$

Hieraus ist leicht die Form dieser Grenzräume abzulesen. Man findet unmittelbar eine mehrfache Pyramide $Py\left[B_{n-k}^{\left(\frac{2}{k}\right)}, A_{k-1}^{(\sqrt{2})}\right]$, deren Basisraum $B_{n-k}^{\left(\frac{2}{k}\right)}$ die 2^{n-k} Punkte B zu Eckpunkten hat und deren k Scheitel C ein $A_{k-1}^{(\sqrt{2})}$ bilden, während die diese Gebilde $B_{n-k}^{\left(\frac{2}{k}\right)}$, $A_{k-1}^{(\sqrt{2})}$ tragenden Räume R_{n-k}, R_{k-1} im gemeinschaftlichen Schwerpunkte

$$\left(\overbrace{\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}}^{k}, \overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{n-k}\right)$$

dieser Gebilde senkrecht aufeinander stehen. Wir zeigen für den Fall $n = 8$, wie hieraus weiter die kennzeichnenden Zahlen der Polytope $K_{k,n-k}$ gefunden werden. Ist (C^q) die Zahl $(n)_q\, 2^q$ der durch Q Punkte C bestimmten Grenzräume R_{q-1}, und (B_p, C^q) die Zahl $(n)_q\,(n-q)_p\, 2^{n-p}$ der durch ein $B_p^{\left(\frac{2}{k}\right)}$ und Q Punkte C begrenzten Grenzräume, so führt die kleine Vorarbeit der Berechnung der Tabelle

$(C^2) = 112$	$(B_2, C) = 10752$	$(B_1, C^4) = 35840$	$(B_5, C) = 1344$
$(B_0, C) = 2048$	$(B_3) = 1792$	$(B_2, C^3) = 35840$	$(B_6) = 112$
$(B_1) = 1024$		$(B_3, C^2) = 17920$	
	$(C^5) = 1792$	$(B_4, C) = 4480$	$(C^8) = 256$
$(C^3) = 448$	$(B_0, C^4) = 17920$	$(B_5) = 448$	$(B_0, C^7) = 1024$
$(B_0, C^2) = 7168$	$(B_1, C^3) = 35840$		$(B_1, C^6) = 1792$
$(B_1, C) = 7168$	$(B_2, C^2) = 26880$	$(C^7) = 1024$	$(B_2, C^5) = 1792$
$(B_2) = 1792$	$(B_3, C) = 8960$	$(B_0, C^6) = 7168$	$(B_3, C^4) = 1120$
	$(B_4) = 1120$	$(B_1, C^5) = 21504$	$(B_4, C^3) = 448$
$(C^4) = 1120$		$(B_2, C^4) = 26880$	$(B_5, C^2) = 112$
$(B_0, C^3) = 14336$	$(C^6) = 1792$	$(B_3, C^3) = 17920$	$(B_6, C) = 16$
$(B_1, C^2) = 21504$	$(B_0, C^5) = 14336$	$(B_4, C^2) = 6720$	

zu den folgenden Resultaten:

	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	16	112	448	1120	1792	1792	1024	256
(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ∞)	272	2160	7616	15456	19712	16128	7168	1024
(1, 1, 1, 1, 1, 1, ∞, ∞)	272	3184	14784	36960	55552	50176	21504	1792
(1, 1, 1, 1, 1, ∞, ∞, ∞)	272	3184	16576	47712	80640	71680	26880	1792
(1, 1, 1, 1, ∞, ∞, ∞, ∞)	272	3184	16576	48384	71680	53760	17920	1120
(1, 1, 1, ∞, ∞, ∞, ∞, ∞)	272	3184	16128	34048	36960	22400	6720	448
(1, 1, ∞, ∞, ∞, ∞, ∞, ∞)	272	3072	8960	12544	10080	4928	1344	112
(1, ∞, ∞, ∞, ∞, ∞, ∞, ∞)	256	1024	1792	1792	1120	448	112	16

Welche Formel $(r_0, r_1, \ldots, r_{n-1})$ entspricht einem an allen Elementen regelmäßig abgestumpften Polytope? Wie unmittelbar einleuchtet, ist — von metrischen Verhältnissen abgesehen und lediglich mit Rücksicht auf Isomorphismus — das Resultat dieser Abstumpfung bei B_n und C_n das nämliche und zwar ein Polytop mit $2^n n!$ Eckpunkten, deren Koordinaten in bezug auf das von den n Hauptstrahlen OS_{n-1} des B_n, oder von den n Hauptstrahlen OS_0 des C_n gebildete rechtwinklige System die mit allen möglichen Zeichenkombinationen genommenen Permutationen von n ungleichen Größen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sind. Die Bemerkung, daß beim gesuchten Polytope auf jedem Hauptvektor $OS_0, OS_1, \ldots, OS_{n-1}$ des B_n ein Grenzraum R_{n-1} senkrecht steht, während beim Hauptkristalle des regulären Systems auf jedem dieser Vektoren ein Eckpunkt liegt, beweist aber, daß das gesuchte Polytop dem erwähnten Hauptkristalle reziprok verwandt ist, woraus dann die Ergebnisse $r_{n-1} = 3^n - 1$, $r_{n-2} = 5^n - 2 \cdot 3^n + 1$, $r_{n-3} = 7^n - 3 \cdot 5^n + 3 \cdot 3^n - 1$, usw. unmittelbar hervorgehen. Und beschränkt man sich bei der ersten Auffassung ausschließlich auf die positiv genommenen Permutationen der n Größen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, so erhält man das entsprechende Abstumpfungsresultat desjenigen Grenzsimplex A_{n-1} des C_n, welches von allen n Achsen positive Segmente abschneidet. Für dieses abgestumpfte A_{n-1} ist dann, wie sich nun auch leicht ergibt,

$$r_{n-2} = 2(2^{n-1} - 1), \quad r_{n-2} = 3(3^{n-1} - 2 \cdot 2^{n-1} + 1),$$
$$r_{n-4} = 4(4^{n-1} - 3 \cdot 3^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} - 1), \text{ usw.}$$

87. Die n-dimensionalen Netze. Aus den früher [80, 81] erwähnten Werten der Tangente des halben Neigungswinkels zwischen zwei benachbarten Grenzräumen R_{n-1} eines der regulären Polytope ergibt sich, daß von diesen für $n > 4$ nur das Polytop B_n eine Ausfüllung des R_n liefern kann. Wir untersuchen also jetzt nur noch, zu welchen Ergebnissen die einfachsten Umbildungen [63, 79] dieses einfachen B_n-Netzes führen.

Denkt man sich das B_n-Netz aus abwechselnd weißen und schwarzen Polytopen B_n zusammengesetzt, jedes der weißen Polytope B_n in $2n$ kongruente Pyramiden mit dem Polytopenmittelpunkte als gemeinschaftlichem Scheitel und den $2n$ Grenzpolytopen B_{n-1} als Bases zerlegt, und jede dieser weißen Pyramiden vereinigt mit demjenigen schwarzen Polytope B_n, welchem sie sich mit ihrem Basisraume anschmiegt, so entsteht das Netz der Kristallform $(1, 1, \infty, \infty, \ldots, \infty)$.

Das Resultat der zweiten Umbildung wird erhalten, indem man das $B_n^{(2)}$, dessen $2n$ Grenzräume R_{n-1} durch $x_i = \pm 1$ dargestellt sind, schneidet durch die $(n-1)$-dimensionalen Räume $\pm x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \ldots \pm x_n = \frac{n}{2}$, welche die 2^n Hauptvektoren OS_0 des $B_n^{(2)}$ senkrecht hälften, und es ist deshalb als die Kombination der Kristallformen $B_n^{(2)}$ und $C_n^{(\frac{1}{2}+\sqrt{2})}$ zu betrachten. Man würde sich aber irren, wenn man meinte, daß es richtig sei bei allgemeinem n von einer einfachen regelmäßigen Abstumpfung einer dieser Formen durch die andere zu reden; denn für $n > 3$ liegt jeder Grenzraum R_{n-1} der einen Form dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte so nahe, daß er die in den entsprechenden Punkt zusammenlaufenden Kanten der andern nicht mehr schneidet. So erhält man für $n = 5$ eine Form (240, 720, 720, 280, 42), deren 42 vierdimensionale Grenzräume aus 10 in den Grenzräumen des B_n liegenden (48, 120, 96, 24) und 32 in den Grenzräumen des C_n liegenden (30, 60, 40, 10) bestehen, während bei der Eckenabstumpfung des C_n durch B_n (B_n durch C_n) in den Grenzräumen R_{n-1} von B_n (C_n) ein C_{n-1} (A_{n-1}) entsteht. Die gefundene Form besitzt nichtsdesto-

weniger einen hohen Grad von Regelmäßigkeit. Alle Kanten haben die Länge $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, die Seitenflächen sind gleichseitige Dreiecke und reguläre Hexagone, die dreidimensionalen Grenzräume sind regelmäßig abgestumpfte Tetraeder, die 10 vierdimensionalen Grenzräume (48, 120, 96, 24) sind regelmäßig abgestumpfte C_4, usw.

Durch Polarisation in bezug auf den Kugelraum K_{n-1} mit dem Koordinatenursprunge als Mittelpunkt und der Einheit als Radius transformiert sich das von den $2n$ Räumen $x_i = \pm 1$ und den 2^n Räumen $\pm x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \cdots \pm x_n = \frac{n}{2}$ eingeschlossene Polytop in das Polytop mit den $2n + 2^n$ Eckpunkten $(\pm 1, 0, 0, \ldots, 0)$ und $\left(\pm\frac{2}{n}, \pm\frac{2}{n}, \ldots, \pm\frac{2}{n}\right)$. Für gerades $n = 2m$ ist letzteres Polytop das uns schon bekannte $K_{m,m}$. So findet man für die Grundform dieser neuen Raumausfüllung im Falle $n = 6$ ein Polytop (160, 1440, 2880, 2160, 636, 76), im Falle $n = 8$ ein Polytop (1120, 17920, 53760, 71680, 48384, 16576, 3184, 272), usw.

Vierter Abschnitt.

Die runden Polytope.

§ 9. Die Kugelräume.

88. Allgemeines. Wir wenden uns jetzt, das lineare Gebiet verlassend, zum speziellen Studium des Ortes der Punkte P des Raumes R_n, welche von irgend einem gegebenen Punkte O dieses Raumes einen gegebenen Abstand r haben. Dieser Ort ist früher (I 69) als *Kugelraum* K_{n-1} bezeichnet worden[1]; O ist sein Mittelpunkt, r sein Radius. Er zerlegt offenbar den Raum R_n in zwei Teile, einen endlichen inneren Teil von Punkten Q_i mit Abständen OQ_i kleiner, und einen unendlichen äußeren Teil von Punkten Q_a mit Abständen OQ_a größer als r. Natürlich kann auch der von dem Orte eingeschlossene Teil von R_n als Kugelraum bezeichnet werden; nur wenn Verwirrung zu befürchten ist, werden wir dem Namen Kugelraum eine umfassendere Bedeutung beilegen und von „Oberfläche“ und „Inhalt“ dieses Kugelraumes reden.

Wir haben uns bemüht in den vorhergehenden Abschnitten die Betrachtungen über lineare Gebilde zu einem gewissen Abschluß zu bringen bevor wir uns angeschickt haben, in diesem letzten Abschnitte die nicht-linearen Gebilde zu studieren. Jedoch waren wir öfters genötigt, die einfachsten Eigenschaften des Kugelraumes zu benutzen. So war es unmöglich, die Theorie der regulären Polytope zu entwickeln, ohne von um-, an- und eingeschriebenen Kugel-

[1]) Wir werden dieses Symbol weiterhin durch K_n ersetzen, durch den Fußindex die Dimension des tragenden linearen Raumes angebend.

räumen zu reden. In dieser Nummer werden wir an diese einfachsten Eigenschaften anschließen.

Der Kugelraum K_n ist nach Größe und Lage bestimmt, wenn man Mittelpunkt O und Radius r kennt; wir bezeichnen ihn deshalb näher als $K_n(O, r)$. Weil die Lage des Mittelpunktes O von n Größen abhängt, so ist $n+1$ die *Konstantenzahl* des K_n mit Berücksichtigung der Lage, und nur von diesen Konstantenzahlen wird weiterhin die Rede sein. Also wird der Kugelraum K_n im R_n durch $n+1$ einfache Bedingungen bestimmt, oder aber es ist die Zahl der Kugelräume K_n des R_n, welche $n+1$ einfachen Bedingungen Genüge leisten, eine endliche. Bei der Bestimmung mittels $n+1$ Punkte, wo es sich um den Umkugelraum des Simplex $S(n+1)$ handelt, ist diese Zahl die Einheit; andere Fälle werden später vorgeführt werden.

Bei der Betrachtung eines Simplex $S(m+1)$ mit den Eckpunkten $P_1, P_2, \ldots, P_{m+1}$, für welches P'_{m+1} die senkrechte Projektion von P_{m+1} auf den Gegenraum R_{m-1} durch $P_1, P_2, \ldots, P_m$ bedeutete, ergab sich, daß die m Kugelräume $K_n(P_i, P_i P_{m+1})$, wo für i der Reihe nach $1, 2, \ldots, m$ gesetzt werden soll, den Kugelraum $K_{n-m+1}(P'_{m+1}, P'_{m+1}P_{m+1})$ gemein haben, dessen Raum R_{n-m+1} in P'_{m+1} auf dem Raume R_{m-1} durch $P_1, P_2, \ldots, P_m$ senkrecht steht. Diesen beiläufig gefundenen Satz [33] heben wir jetzt absichtlich hervor, um ihn nachher in von der Realität des gemeinschaftlichen Ortes unabhängiger Form auszusprechen. Zu diesem Zwecke schicken wir die zwei folgenden Hilfssätze voraus:

„Der Durchschnitt eines $K_n(O, r)$ mit einem Raume R_m des R_n ist ein $K_m(O', r')$, wo O' die senkrechte Projektion von O auf R_m und $r'^2 = r^2 - OO'^2$ ist."

„Der Ort des Punktes P, welcher in bezug auf die zwei gegebenen Kugelräume $K_n(O_1, r_1)$, $K_n(O_2, r_2)$ des R_n die nämliche Potenz hat, — zu gleicher Zeit der Ort der Mittelpunkte P der Kugelräume K_n, welche die gegebenen Kugelräume senkrecht schneiden —, ist ein Raum R_{n-1}, senkrecht zu der Zentrallinie O_1O_2 in einem durch die Bedingung

$$O_1O^2 - r_1^2 = O_2O^2 - r_2^2$$

bestimmten Punkte O; dieser *Potenzraum* R_{n-1} enthält u. a. die Punkte mit verschwindender Potenz, — die Mittelpunkte der senkrecht schneidenden Punktkugelräume —, welche sämtlich den Durchschnitt der gegebenen Kugelräume bilden."

Der erste Hilfssatz wird abgeleitet aus der Kongruenz der rechtwinkligen Dreiecke $OO'P$, wo P irgend ein Punkt des Schnittes ist; der zweite folgt aus der Bemerkung, daß ein Punkt P des R_{n-1}, welcher von O die Entfernung d hat, in bezug auf $K_n(O_1, r_1)$ und $K_n(O_2, r_2)$ die gleichen Potenzen $d^2 + O_1O^2 - r_2^2$ und $d^2 + O_2O^2 - r_2^2$ aufweist.

Mittels beider Hilfssätze findet man nun leicht folgenden allgemeinen Satz:

„Der Ort des Punktes P, welcher in bezug auf die m gegebenen Kugelräume $K_n(O_i, r_i)$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ des R_n die nämliche Potenz hat, — zu gleicher Zeit der Ort der Mittelpunkte der Kugelräume K_n, welche die gegebenen Kugelräume senkrecht schneiden —, ist ein R_{n-m+1}, senkrecht zum Raume R_{m-1} der m Mittelpunkte O_i in einem durch die Bedingungen

$$O_1O^2 - r_1^2 = O_2O^2 - r_2^2 = \ldots = O_mO^2 - r_m^2$$

bestimmten Punkte O; in diesem *Potenzraume* R_{n-m+1} bilden die den gegebenen Kugelräumen gemeinschaftlichen Punkte einen Kugelraum $K_{n-m+1}(O, r)$, wo r^2 dem gemeinsamen Werte der m Ausdrücke $O_iO^2 - r_i^2$ gleich ist und also positiv, null oder negativ sein kann."

In Verbindung mit diesem Satze müssen auch Kugel, Kreis und Punktepaar als Kugelräume K_3, K_2, K_1 gedeutet werden.

Der Punkt O des Satzes ist im Raume R_{m-1} der m Mittelpunkte O_i der Potenzpunkt der m Kugelräume $K_{m-1}(O_i, r_i)$, in welchen R_{m-1} die m gegebenen Kugelräume $K_n(O_i, r_i)$ schneidet.

Speziell hat man:

„Die zwei Punkte, welche n im R_n willkürlich gegebene Kugelräume $K_n(O_i, r_i)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gemein haben, werden erhalten, indem man im Potenzpunkte O der Durchschnitte $K_{n-1}(O_i, r_i)$ der gegebenen Kugelräume mit dem Raume R_{n-1} der n Mittelpunkte O_i das Lot l auf R_{n-1} errichtet und auf dieses Lot von O aus nach beiden Seiten

hin ein Segment $\sqrt{-p}$ abträgt, wo p die Potenz von O in bezug auf die gegebenen Kugelräume darstellt."

In bezug auf die senkrechte Durchschneidung ist folgender Satz noch allgemeiner:

„Bestimmen die in O senkrecht aufeinander stehenden Räume R_p und R_q in Verbindung mit der Bedingung $p+q=n$ den Raum R_n, ist ferner P irgend ein Punkt von R_p, Q irgend ein Punkt von R_q und r eine bestimmte gegebene Strecke, so stehen die beiden Systeme von Kugelräumen $K_n(P, \sqrt{OP^2-r^2})$, $K_n(Q, \sqrt{OQ^2+r^2})$, deren erste ∞^p und deren zweite ∞^q Kugelräume enthält, zueinander in der Beziehung, daß jeder Kugelraum des einen jeden Kugelraum des andern senkrecht schneidet."

Sind r_p und r_q die Radien der Kugelräume

$$K_n(P, \sqrt{OP^2-r^2}) \quad \text{und} \quad K_n(Q, \sqrt{OQ^2+r^2}),$$

und ist d der Abstand PQ ihrer Mittelpunkte, so hat man

$$r_p^2 = OP^2 - r^2, \quad r_q^2 = OQ^2 + r^2, \quad d^2 = OP^2 + OQ^2$$

und also wirklich

$$r_p^2 + r_q^2 = d^2.$$

Sind $OX_1, OX_2, \ldots, OX_n$ — im speziellen Falle $r=0$ — die Achsen eines rechtwinkligen Systems und $P_1, P_2, \ldots, P_n$ willkürliche Punkte dieser Achsen, so bilden die n Systeme von Kugelräumen $K_n(P_1, OP_1)$, $K_n(P_2, OP_2)$, .., $K_n(P_n, OP_n)$ ein orthogonales System, d. h. jeder Kugelraum irgend eines der n Systeme schneidet alle Kugelräume der $n-1$ übrigen Systeme senkrecht.

89. Der Kugelraum in der analytischen Geometrie. Die Gleichung des Kugelraumes $K_n(M, r)$ auf schiefwinklige Achsen bezogen ist

$$(60) \quad \sum_1^n (x_i - m_i)^2 + 2\sum_1^n (x_i - m_i)(x_k - m_k)\cos\lambda_{i,k} - r^2 = 0,$$

wenn x_i die laufenden Koordinaten, m_i die Koordinaten des Mittelpunktes M und $\lambda_{i,k}$ die Achsenwinkel X_iOX_k sind (I 69). Sie erscheint somit in der allgemeinen Form

$$(61) \quad \sum_1^n x_i^2 + 2\sum_1^n x_i x_k \cos\lambda_{i,k} + 2\sum_1^n A_i x_i + B = 0.$$

Die Glieder dieser Gleichung, welche in den Koordinaten x_i von der zweiten Ordnung sind, nehmen also — abgesehen von einem numerischen Faktor — die Gestalt

$$\sum_1^n x_i^2 + 2\sum_1^n x_i x_k \cos\lambda_{i,k}$$

an; ist dieser Faktor durch Division reduziert auf die Einheit, so spricht man von der *Normalform* der Kugelraumgleichung.

Umgekehrt stellt jede Gleichung (61) einen bestimmten Kugelraum K_n dar: denn (61) wird mit (60) identisch unter den Bedingungen

$$(62)\qquad \begin{cases} -A_i = \sum_{k=1}^n m_k \cos\lambda_{i,k}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ B = \sum_1^n m_i^2 + 2\sum_1^n m_i m_k \cos\lambda_{i,k} - r^2 . \end{cases}$$

Und von diesen $n+1$ Gleichungen bestimmen die ersten n Gleichungen zunächst den Mittelpunkt M, während r^2 sodann aus der letzten abgeleitet werden kann. Dabei kann es sich aber ereignen, daß r^2 null oder sogar negativ wird, usw.

Die Gleichung des Kugelraumes K_n durch die $n+1$ Punkte

$$[y_{1,p}, y_{2,p}, y_{3,p}, \ldots, y_{n,p}], \quad (p = 1, 2, \ldots, n+1)$$

erscheint in der Form

$$(63)\qquad \begin{vmatrix} \Sigma x_i^2 & + & 2\Sigma x_i x_k \cos\lambda_{i,k}, & x_1 & , x_2 & , \ldots x_n & , 1 \\ \Sigma y_{i,1}^2 & + & 2\Sigma y_{i,1} y_{k,1} \cos\lambda_{i,k}, & y_{1,1} & , y_{2,1} & , \ldots y_{n,1} & , 1 \\ \Sigma y_{i,2}^2 & + & 2\Sigma y_{i,2} y_{k,2} \cos\lambda_{i,k}, & y_{1,2} & , y_{2,2} & , \ldots y_{n,2} & , 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Sigma y_{i,n+1}^2 & + & 2\Sigma y_{i,n+1} y_{k,n+1} \cos\lambda_{i,k}, & y_{1,n+1} & , y_{2,n+1} & , \ldots y_{n,n+1} & , 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Es kann die linke Seite der Gleichung (60) leicht geometrisch gedeutet werden. Sind nämlich x_i die Koordinaten irgend eines Punktes P von R_n, so stellt sie die Größe $PM^2 - r^2$ dar. Sind Q und Q' die Punkte, welche irgend

eine durch P gehende Sekante von K_n mit K_n gemein hat, so gilt die Beziehung

$$PM^2 - r^2 = PQ \cdot PQ',$$

wenn man bei den Segmenten PQ und PQ' auf das Zeichen achtet. Also stellt die linke Seite der Kugelraumgleichung in der Normalform für jeden Punkt P des R_n die *Potenz* in bezug auf den Kugelraum dar.

Sind $K^{(1)} = 0$, $K^{(2)} = 0$ die Gleichungen zweier Kugelräume K_n des R_n in der Normalform, so ist $K^{(1)} = K^{(2)}$ die Gleichung des Ortes des Punktes P, welcher in bezug auf diese beiden Kugelräume K_n — und deshalb auch in bezug auf jeden Kugelraum des Büschels $\lambda_1 K^{(1)} + \lambda_2 K^{(2)} = 0$ — die gleiche Potenz hat. Weil die auf beiden Seiten der Gleichung $K^{(1)} = K^{(2)}$ auftretenden Glieder zweiter Ordnung in den veränderlichen Koordinaten sich aufheben, so ist dieser Ort ein R_{n-1}, welcher offenbar alle Punkte enthält, die den beiden Kugelräumen K_n gemein sind.

Sind $K^{(1)} = 0$, $K^{(2)} = 0$, ..., $K^{(p)} = 0$ die Gleichungen von p willkürlich im R_n angenommenen Kugelräumen K_n, so stellen die $p - 1$ Gleichungen

$$K^{(i)} - K^{(p)} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, p-1)$$

den Ort R_{n-p+1} des Punktes P dar, welcher in bezug auf die p Kugelräume K_n — und deshalb auch in bezug auf jeden Kugelraum K_n des linearen Systemes

$$\lambda_1 K^{(1)} + \lambda_2 K^{(2)} + \ldots + \lambda_p K^{(p)} = 0 \ —$$

die gleiche Potenz hat; dieser Potenzraum durch die den Kugelräumen gemeinschaftlichen Punkte ist den $(p)_2$ Räumen R_{n-1}, durch die Gleichung $K^{(i)} - K^{(k)} = 0$ dargestellt, gemeinsam.

Bei Winkelbeziehungen bediene man sich eines rechtwinkligen Koordinatensystemes; der Winkel δ, unter welchem sich die zwei Kugelräume

$$\Sigma x_i^2 + 2\Sigma a_i x_i + \alpha = 0, \quad \Sigma x_i^2 + 2\Sigma b_i x_i + \beta = 0$$

des R_n überall schneiden, wird dann gegeben durch die einfache Formel

$$\cos\delta = \frac{\alpha + \beta - 2\Sigma a_i b_i}{2\sqrt{(\Sigma a_i^2 - \alpha)(\Sigma b_i^2 - \beta)}}.$$

Die Kugelräume schneiden sich infolgedessen rechtwinklig unter der Bedingung

$$\alpha + \beta = 2 \Sigma a_i b_i ;$$

weil diese Beziehung in den Koeffizienten der beiden Gleichungen jede für sich linear ist, so kann es $^{(88)}$ lineare Systeme einander senkrecht schneidender Kugelräume geben. Speziell erwähnen wir den Satz:

„Das lineare System

$$\lambda_1 K^{(1)} + \lambda_2 K^{(2)} + \ldots + \lambda_n K^{(n)} = 0 ,$$

welches durch n willkürlich im R_n angenommene Kugelräume bestimmt wird, läßt einen Orthogonalkugelraum zu, welcher den Potenzpunkt des Systems zum Mittelpunkt und die Wurzel aus der Potenz dieses Punktes zum Radius hat."

Die Kugelräume $K^{(1)} = 0$, $K^{(2)} = 0$ berühren sich unter der Bedingung

$$(\alpha + \beta - 2 \Sigma a_i b_i)^2 = 4 (\Sigma a_i^2 - \alpha)(\Sigma b_i^2 - \beta) ;$$

weil diese Beziehung nicht linear ist in den Koeffizienten der beiden Gleichungen, so kann es keine zwei lineare Systeme von Kugelräumen geben mit der Eigenschaft, daß jeder Kugelraum des einen alle Kugelräume des andern berührt.

90. Der Kugelraum in der darstellenden Geometrie. Mit der Darstellung des Punktes (I 53) ist auch die Darstellung des Kugelraumes gegeben; denn man steigt vom Mittelpunkte zum Kugelraume empor, indem man um die bestimmenden Projektionen des Mittelpunktes als Mittelpunkte Kreise mit dem Radius des Kugelraumes als Radius beschreibt. Diese Kreise bilden den Umriß der entsprechenden Projektionen.

Aufgabe 83. Wo liegen im R_n die Punkte eines K_n, welche sich bei Projektion auf $O(X_1 X_2)$ in diesen Umriß projizieren?

Wir gehen also sofort zur Bestimmung eines Punktes der Oberfläche des Kugelraumes über und beschränken uns dabei auf den Fall des R_4.

Ist (Fig. 81) der Kugelraum $K_4(M, r)$ durch die Kreise $K_2(M_{12}, r)$, $K_2(M_{34}, r)$ gegeben, so kann man von irgend einem Punkte P seiner Oberfläche P_{12} innerhalb des Kreises $K_2(M_{12}, r)$ willkürlich annehmen und voraussetzen, daß P_{34} in einer zu OX_4 parallelen Gerade g liegen soll. Mittels der Beziehung $M_{12}P_{12}^2 + M_{34}P_{34}^2 = r^2$ wird P_{34} dann erhalten als einen der beiden Schnittpunkte von g mit dem Kreise $K_2(M_{34}, P_{12}Q)$.

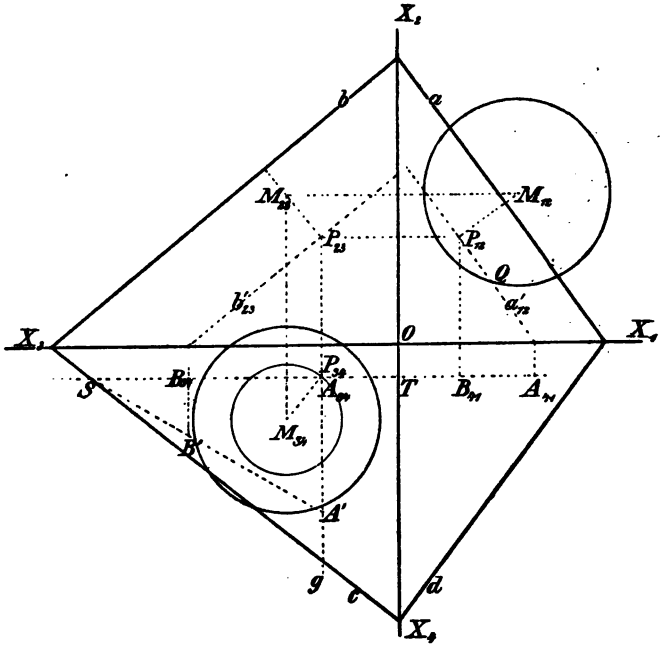


Fig. 81.

Der dreidimensionale Berührungsraum des Kugelraumes im Punkte P steht in P senkrecht auf dem Radius MP des Berührungspunktes; also stehen seine zu bestimmenden Spuren a, b, c, d mit $O(X_1X_2)$, $O(X_2X_3)$, $O(X_3X_4)$,

$O(X_4 X_1)$ der Reihe nach senkrecht auf den Projektionen $M_{12}P_{12}$, $M_{23}P_{23}$, $M_{34}P_{34}$, $M_{41}P_{41}$ des Radius MP und hat man nur noch einen Punkt irgend einer dieser Spuren zu finden. Diese Aufgabe ist dadurch gelöst worden, daß man die Schnittpunkte A und B der durch P zu a und b parallelen Geraden a' und b' mit dem Raume $O(X_3 X_4 X_1)$, und nachher den Schnittpunkt S der Gerade AB mit der Ebene $O(X_3 X_4)$ konstruiert hat; zu diesem Zwecke ist die projizierende Ebene von AB auf $O(X_3 X_4)$ um ihre Spur $A_{34}B_{34}$ mit $O(X_3 X_4)$ in $O(X_3 X_4)$ umgelegt, und $A_{34}A' = TA_{41}$, $B_{34}B' = TB_{41}$ genommen. Dann ist S ein Punkt der Spur c, usw.

Der Ort des Punktes P eines Kugelraumes $K_4(M, r)$, für welche der Berührungsraum R_3 durch einen außerhalb des Kugelraumes gegebenen Punkt Q geht, ist der Schnitt des Kugelraumes mit dem Raume R_3 senkrecht zu MQ, welcher dem Punkte Q entspricht in der Orthogonalitätsverwandtschaft mit M als Mittelpunkt und r^2 als Potenz.

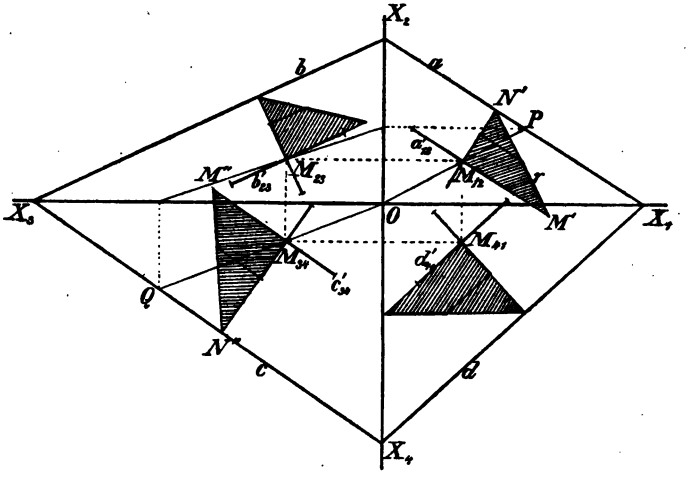


Fig 82.

Deshalb wenden wir uns jetzt zunächst zu der Bestimmung der Projektionen dieses Schnittes, um später auf das Berührungsproblem zurückzukommen. Diese Konstruktion zer-

fällt in zwei Teile; erstens muß die Schnittkugel nach Mittelpunkt und Radius bestimmt, zweitens muß sie projiziert werden. Der erste Teil ist faktisch gelöst, wenn man Projektion und Abstand des Kugelraummittelpunktes vom so gut wie gegebenen Schnittraume gefunden hat (I 64), und kann deshalb als eine Vorarbeit betrachtet werden, die hier unterdrückt werden darf, d. h. wir setzen voraus, daß (Fig. 82) ein Raum mit den Spuren a, b, c, d, ein Punkt M (der Gerade PQ) dieses Raumes und ein Radius r gegeben sind, und suchen wie sich die Kugel $K_3(M, r)$ dieses Raumes auf die Ebenen $O(X_1X_2)$, $O(X_2X_3)$, $O(X_3X_4)$, $O(X_4X_1)$ projiziert. Jede dieser Projektionen ist eine Ellipse; es ist leicht Richtung und Größe der Achsen dieser Ellipse zu finden. Bringt man durch M die zu $O(X_1X_2)$ parallele Ebene, so schneidet diese den Raum $abcd$ in einer zu a parallelen Gerade a'; deshalb trägt die Projektion a'_{12} dieser Gerade die große Achse der Ellipse, und ist dieselbe dem Durchmesser der Kugel gleich. Und die kleine Achse der Ellipse wird der Größe nach gefunden mittels des rechtwinkligen Dreiecks $M_{12}M'N'$, wo $M_{12}M' = OM_{34}$ genommen ist.

Bei der Bestimmung des Durchschnittes eines Kugelraumes $K_4(M, r)$ mit einer Ebene ε müssen wir uns auf einige kurze Andeutungen beschränken. Zunächst setzen wir wieder voraus, das Problem sei durch eine Vorarbeit — vergleiche Aufgabe 135 des ersten Teiles — auf die Bestimmung der Projektionen eines in einer gegebenen Ebene ε liegenden Kreises $K_2(M, r)$ reduziert. Diese Projektionen sind bekanntlich — siehe Aufgabe 86 des ersten Teiles — wieder Ellipsen; ihre Achsenrichtungen stehen in einfacher Weise mit den Winkelpaaren von ε mit den Projektionsebenen in Verbindung.

Behufs späterer Anwendung besprechen wir das Problem der Bestimmung der zwei einem Kugelraume $K_4(M, r)$ und einer Gerade g gemeinschaftlichen Punkte. Wir betrachten zu diesem Zwecke (Fig. 83) die Ebene ε, welche g senkrecht, d. h. parallel zu OX_4, auf den Raum $O(X_1X_2X_3)$ projiziert, und erhalten die gesuchten Punkte P, Q als Schnittpunkte der Gerade g mit dem Kreise (k), welchen ε mit dem Kugelraume $K_4(M, r)$ gemein hat. Zum Zwecke der Umlegung von ε in die Bildebene legen wir zunächst die

Ebene ε', welche die Gerade (g_{12}, g_{23}) von $O(X_1 X_2 X_3)$ auf $O(X_2 X_3)$ projiziert, um g_{23} in $O(X_2 X_3)$ um; mittels der Lote $A_{23} A' = A_{23} A_{12}$ und $B_{23} B = B_2 B_{12}$ ist in dieser umgelegten Ebene ε' die Gerade $g' = A'B$ bestimmt. Nachher findet man dann mittels des Lotes $A'A = OA_{34}$ die Lage AB von g in der umgelegten Ebene ε. Und der Kreis projiziert sich auf $O(X_1 X_2 X_3)$ in die Sehne, welche die Pro-

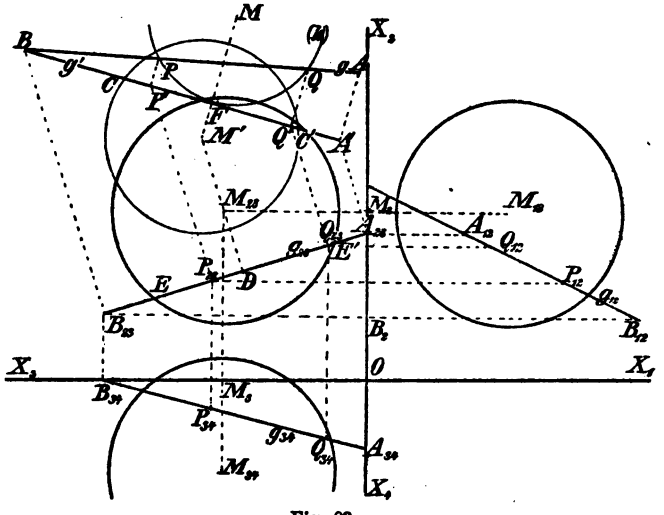


Fig. 88.

jektionskugel K_3 des Kugelraumes auf $O(X_1 X_2 X_3)$ in der Projektion (g_{12}, g_{23}) von g bestimmt; diese in ε' liegende Sehne CC' wird erhalten, indem man aus M_{23} das Lot $M_{23} D$ auf g_{23} fällt, auf diesem Lote $DM' = M_2 M_{12}$ annimmt und aus M' mit der Hälfte DE der Sehne EE' als Radius einen Kreis beschreibt. Wird nun das Lot $M'F$ aus M' auf g' um $FM = M_3 M_{34}$ verlängert, so sind M und FC Mittelpunkt und Radius von (k), und findet man also die Schnittpunkte P und Q.

[Nach diesen Entwicklungen im R_4 kommen wir in aller Kürze auf den allgemeinen Fall des R_n zurück. Wir denken uns in einem Raume R_{n_1} einen Kugelraum $K_{n_1}(M, r)$ und projizieren dieses Gebilde senkrecht auf einen Raum R_{n_2},

welcher mit R_{n_1} einen Raum $R_{n_{12}}$ gemein hat und in bezug auf R_{n_1} keine besonderen Orthogonalitätsverhältnisse zeigt. Dabei sind dann die drei Fälle zu unterscheiden, wo der Reihe nach $n_1 < n_2$, $n_1 = n_2$, $n_1 > n_2$ ist.

Ist $n_1 < n_2$, M' die Projektion von M, R'_{n_1} die Projektion von R_{n_1}, und sind A_1OA_2, B_1OB_2, C_1OC_2, ... die $n_1 - n_{12}$ in einem Punkte O des Raumes $R_{n_{12}}$ von R_{n_1} und R_{n_2} gebildeten Winkel α, β, γ, ..., wo die Schenkel $OA_1, OB_1, OC_1, \ldots$ dem R_{n_1}, die Schenkel $OA_2, OB_2, OC_2, \ldots$ dem R_{n_2} angehören, so denke man sich im R'_{n_1} ein rechtwinkliges Achsensystem mit M' als Ursprung so gewählt, daß $n_1 - n_{12}$ der n_1 Achsen zu den Geraden $OA_2, OB_2, OC_2, \ldots$ parallel sind, und die n_{12} übrigen also im Raume $R'_{n_{12}}$ durch M' parallel zu $R_{n_{12}}$ liegen. Trägt man dann auf die zu OA_2, OB_2, OC_2, ... und $R_{n_{12}}$ parallelen Achsen von M' aus nach beiden Seiten hin der Reihe nach die Segmente $r\cos\alpha$, $r\cos\beta$, $r\cos\gamma$, ... und r ab, so bilden die $2n_1$ Endpunkte dieser Segmente die Scheitel des quadratischen gebogenen Raumes $Q^2_{n_1}$, welcher die gesuchte Projektion darstellt.

Für $n_1 = n_2$ hat man in obenstehender Aussage des Satzes für n_2 nur n_1 zu schreiben; ist außerdem $n_{12} = 0$, so liegt der merkwürdige Fall vor, wo ein Kugelraum K_{n_1} sich in einen quadratischen gebogenen Raum $Q^2_{n_1}$ mit sämtlich voneinander verschiedenen Achsen projiziert.

Ist $n_1 > n_2$, so ist die Projektion ein $Q^2_{n_2}$, welcher sich auf ganz analoge Weise bestimmen läßt.

Das oben erwähnte Resultat, nach welchem die Projektion eines Kugelraumes K_p auf einen zum Träger R_p dieses K_p windschiefen Projektionsraum R'_p ein quadratischer gebogener Raum Q^2_p ist, liefert den sowohl geometrisch wie analytisch kürzesten Weg zur Bestimmung der von den Räumen R_p und R'_p gebildeten Winkel.

Denkt man sich den Fall zweier Räume R_p und R'_p, welchen im R_n ein einziger Punkt O gemeinschaftlich ist, nimmt in R_p einen Kugelraum $K_p(O, 1)$ an und projiziert diesen Kugelraum auf R'_p, so sind die Halbachsen $a_1, a_2, \ldots, a_p$ der Projektion die Cosinus der gesuchten Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, und es werden diese Winkel gebildet von den Achsen der Projektion und den Kugelraumradien, deren Projektionen sie sind.

Nimmt man andererseits im R_n ein rechtwinkliges Koordinatensystem $O(X_1 X_2 \ldots X_n)$ und einen in bezug auf dieses durch das Gleichungssystem

$$x_{p+i} = a_{1,i} x_1 + a_{2,i} x_2 + \ldots + a_{p,i} x_p$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-p)$$

bestimmten R_p an, so können die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ dieses Raumes R_p mit dem Koordinatenraume $O(X_1 X_2 \ldots X_p)$ folgendermaßen bestimmt werden. Ist P irgend ein Punkt des R_p, Q seine Projektion auf den Koordinatenraum $O(X_1 X_2 \ldots X_p)$ und α der Winkel POQ, so hat man

$$\operatorname{tang}^2 \alpha = \frac{OP^2 - OQ^2}{OQ^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n-p} (a_{1,i} x_1 + a_{2,i} x_2 + \ldots + a_{p,i} x_p)^2}{OQ^2}.$$

Denkt man sich nun die durch O hindurchgehenden Geraden des R_p als Fahrstrahlen des Gebildes, welches sich auf $O(X_1 X_2 \ldots X_p)$ als

$$\sum_{i=1}^{n-p} (a_{1,i} x_1 + a_{2,i} x_2 + \ldots + a_{p,i} x_p)^2 = 1 \tag{64}$$

projiziert, so geht die vorhergehende Beziehung in

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{OQ}$$

über. Vereinfacht man nun die Gleichung (64) mittels Einführung der Koeffizienten $A_{k,k}$ und $A_{k,l}$, bestimmt durch die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n-p} a_{k,i}^2 = A_{k,k}, \quad \sum_{i=1}^{n-p} a_{k,i} a_{l,i} = A_{k,l},$$

wodurch sie in der symbolischen Form

$$(A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 \ldots + A_p x_p)^{(2)} = 1$$

erscheint, so sind die Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ der Achsengleichung die Wurzeln der bekannten sekulären Gleichung und zu gleicher Zeit $\operatorname{tang}^2 \alpha_1, \operatorname{tang}^2 \alpha_2, \ldots, \operatorname{tang}^2 \alpha_p$. Deshalb ist — wenn z für $\operatorname{tang}^2 \alpha$ geschrieben wird —

$$\begin{vmatrix} \Sigma a_{1,i}^2 - z, & \Sigma a_{1,i}a_{2,i}, & \Sigma a_{1,i}a_{3,i}, & \dots & \Sigma a_{1,i}a_{p,i} \\ \Sigma a_{2,i}a_{1,i}, & \Sigma a_{2,i}^2 - z, & \Sigma a_{2,i}a_{3,i}, & \dots & \Sigma a_{2,i}a_{p,i} \\ \Sigma a_{3,i}a_{1,i}, & \Sigma a_{3,i}a_{2,i}, & \Sigma a_{3,i}^2 - z, & \dots & \Sigma a_{3,i}a_{p,i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Sigma a_{p,i}a_{1,i}, & \Sigma a_{p,i}a_{2,i}, & \Sigma a_{p,i}a_{3,i}, & \dots & \Sigma a_{p,i}^2 - z \end{vmatrix} = 0,$$

wo alle Σ sich auf Summationen von $i = 1$ bis $i = n - p$ beziehen, die gesuchte Gleichung mit den Wurzeln

$$\operatorname{tang}^2\alpha_1, \operatorname{tang}^2\alpha_2, \dots, \operatorname{tang}^2\alpha_p,$$

welche die früher erhaltenen Resultate — man vergleiche im ersten Teile z. B. die Aufgabe 322 — sämtlich umfaßt.]

Wir kehren jetzt zum Probleme der Bestimmung eines durch einen außerhalb des Kugelraumes gegebenen Punkt

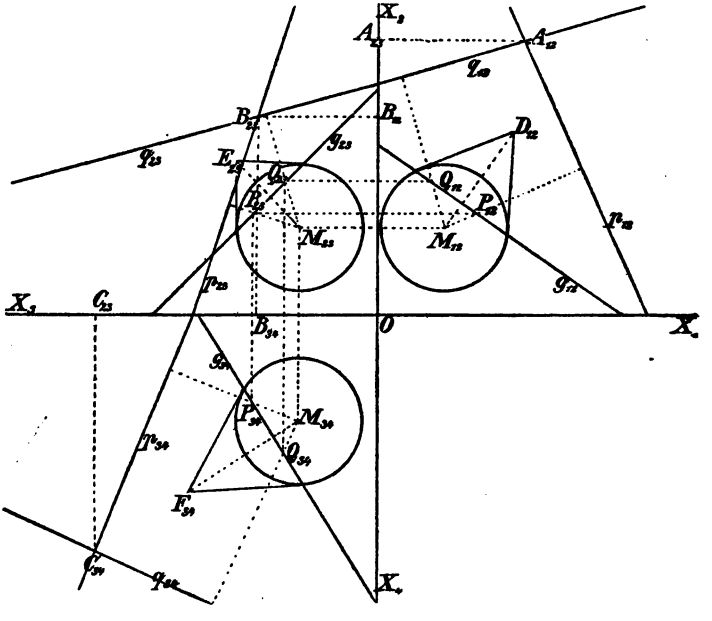


Fig. 84.

gehenden Berührungsraumes zurück und beschränken uns dabei auf die vierdimensionale Verallgemeinerung der

klassischen Mongeschen Konstruktion einer durch eine gegebene Gerade gehenden Berührungsebene einer Kugel, d. h. wir lösen folgendes Problem:

„Eine Ebene ε (Fig. 84) ist im R_4 durch ihre Spurpunkte A_{12}, B_{23}, C_{34} mit den Ebenen $O(X_1X_2)$, $O(X_2X_3)$, $O(X_3X_4)$ gegeben. Durch ε an einen gegebenen Kugelraum $K_4(M, r)$ einen Berührungsraum zu legen."

Die Lösung dieser Aufgabe ist äußerst einfach; sie lautet folgendermaßen: Man bestimme die Projektionen D_{12}, E_{23}, F_{34} der Punkte D, E, F von ε, deren Projektionen D_{34}, E_{41}, F_{12} der Reihe nach mit M_{34}, M_{41}, M_{12} zusammenfallen, und betrachte die Gerade g, welche die Polaren g_{12}, g_{23}, g_{34} von D_{12}, E_{23}, F_{34} in bezug auf die Projektionen $K_2(M_{12}, r)$, $K_2(M_{23}, r)$, $K_2(M_{34}, r)$ von $K_4(M, r)$ auf $O(X_1X_2)$, $O(X_2X_3)$, $O(X_3X_4)$ zu Projektionen hat; die Berührungsräume $p_{12}p_{23}p_{34}$ und $q_{12}q_{23}q_{34}$ von $K_4(M, r)$ in den Schnittpunkten P, Q von g mit $K_4(M, r)$ sind die gesuchten Berührungsräume durch ε.

91. Verschiedene Bestimmungsweisen des Kugelraumes. Einer einfachen Bedingung in bezug auf einen Kugelraum K_n entspricht eine einzige Beziehung zwischen den $n+1$ in der Kugelraumgleichung enthaltenen Parametern. Also ist es eine einfache Bedingung, daß der zu bestimmende Kugelraum K_n irgend einen Raum R_p, $(p < n)$, oder irgend einen Kugelraum K_p, $(p < n+1)$, seines Raumes R_n unter gegebenem Winkel schneide. Beschränken wir uns hier — das Apollonische Kreisproblem verallgemeinernd — auf die Bedingungen

a durch einen Punkt zu gehen,

b_p einen Raum R_p, $(p < n)$, zu berühren,

c_p einen Kugelraum K_p, $(p < n+1)$, zu berühren,

so ist die Anzahl der verschiedenen Probleme doch noch eine ganz bedeutende, nämlich gleich der Zahl der Glieder des Polynoms

$$(a + b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} + c_2 + c_3 + \ldots + c_n)^{n+1},$$

und somit gleich der Zahl der Kombinationen von $2n-1$ Elementen zur $(n+1)$-ten Klasse mit, oder gleich der Zahl der Kombinationen von $3n-1$ Elementen zur $(n+1)$-ten Klasse ohne Wiederholungen, d. h. $(3n-1)_{n+1}$. Diese

Zahl geht bei Unterdrückung der Bedingungen $c_2, c_3, \ldots, c_n$ in $(2n)_{n+1}$ oder $(2n)_{n-1}$, bei Unterdrückung der Bedingungen $b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}$ und $c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}$ in $(n+3)_{n+1}$ oder $(n+3)_2$ über. Beschränkt man sich auf a und b_{n-1}, so sind nur $n+2$ verschiedene Fälle möglich; wir fangen mit der Betrachtung dieser $n+2$ Fälle an.

Bei den $n+2$ Fällen, welche dem Binomium $(a+b_{n-1})^{n+1}$ entsprechen, unterscheiden wir zwei Grenzfälle a^{n+1}, b_{n-1}^{n+1} und n gemischte Fälle $a^p b_{n-1}^{n-p+1}$, $(p=1, 2, .., n)$. Die Grenzfälle werden für sich betrachtet, die gemischten Fälle auf die nämliche Hilfskonstruktion zurückgeführt.

Der Grenzfall a^{n+1} führt auf den Umkugelraum des Simplex $S(n+1)$ zurück; beim Grenzfall b_{n-1}^{n+1} muß man die Raumpaare R_{n-1} anwenden, welche die vom Raume $R_{n-1}^{(n+1)}$ mit den übrigen gegebenen Räumen $R_{n-1}^{(i)}$, $(i=1, 2, \ldots, n)$, gebildeten Winkel φ_i hälften. Sind

$$(R_+^{(1)}, R_-^{(1)}), (R_+^{(2)}, R_-^{(2)}), \ldots, (R_+^{(n)}, R_-^{(n)})$$

diese Raumpaare, wobei das Zeichen + allemal den Teilraum des inneren, das Zeichen − allemal den Teilraum des äußeren Winkels bezeichnet, so ist der Schnittpunkt jeder Gruppe von n Räumen

$$[R^{(1)}, R^{(2)}, \ldots, R^{(n)}]$$

Mittelpunkt eines gesuchten Kugelraumes. Die Zahl der Lösungen ist deshalb 2^n.

Zur Behandlung der gemischten Fälle lösen wir zunächst folgendes Problem:

„Im R_n sind ein Punkt A, ein Raum R_{n-1} und eine Gerade g gegeben. Man verlangt einen Kugelraum K_n zu bestimmen, welcher durch A geht, R_{n-1} berührt und einen Punkt von g zum Mittelpunkte hat."

Man suche

a) die senkrechte Projektion g' von g auf R_{n-1},
b) die senkrechte Projektion A' von A auf g,
c) den Raum R'_{n-1} in A' senkrecht zu g,
d) den Kugelraum $K_n(A', A'A)$,
e) den Schnitt R_{n-2} von R_{n-1} und R'_{n-1},
f) irgend einen Punkt B von R_{n-2},
g) die Potenz ϱ^2 von B in bezug auf $K_n(A', A'A)$.

Dann ist der Berührungspunkt des gesuchten Kugelraumes

mit R_{n-1} irgend einer der beiden Schnittpunkte von g' mit dem Kugelraume $K_{n-1}(B, \varrho)$ von R_{n-1}. Also gibt es zwei Lösungen, die aber imaginär sein können.

Mittels dieser Hilfskonstruktion lassen sich die n gemischten Fälle sämtlich behandeln, indem man in jedem Falle eine Gerade sucht, welche den Mittelpunkt enthalten muß. Diese Gerade ergibt sich immer als Schnitt von $n-1$ Räumen R_{n-1}. So findet man im Falle $a^p b_{n-1}^{n-p+1}$, wo $A^{(1)}A^{(2)}, \ldots, A^{(p)}$ die gegebenen Punkte, $R_{n-1}^{(1)}, R_{n-1}^{(2)}, \ldots, R_{n-1}^{(n-p+1)}$ die gegebenen Räume R_{n-1} sein mögen, die Kombination von den $p-1$ Räumen R_{n-1}, welche die Segmente $A^{(i)}A^{(p)}$, $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$, senkrecht hälften, mit $n-p$ Räumen R_{n-1} der Raumpaare, welche die Winkel $R_{n-1}^{(i)} R_{n-1}^{(n-p+1)}$, $(i = 1, 2, \ldots, n-p)$, hälften. Also erhält man 2^{n-p} Gerade g und, weil jede Gerade g zwei Lösungen herbeiführt, theoretisch 2^{n-p+1} Lösungen. Wir müssen aber sofort hinzufügen, daß von diesen Lösungen höchstens zwei reell sein können.

92. Die Ähnlichkeitspunkte der Kugelräume. Wie bei zwei in der nämlichen Ebene liegenden Kreisen treten auch bei zwei Kugelräumen $K_n(M_1, r_1)$, $K_n(M_2, r_2)$ vom R_n auf der Zentrale $M_1 M_2$ zwei Ähnlichkeitspunkte auf, ein äußerer $A_{1,2}$ und ein innerer $I_{1,2}$; durch A gehen die Verbindungslinien $P_1 P_2$ der Endpunkte P_1, P_2 paralleler Radien von gleichem, durch I die Verbindungslinien $P_1 P_2'$ der Endpunkte P_1, P_2' paralleler Radien von entgegengesetztem Sinn. Sind $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, die Koordinaten der Mittelpunkte M_1, M_2, so ergeben die Formeln

$$x_k^{(a)} = \frac{r_1 x_k^{(2)} - r_2 x_k^{(1)}}{r_1 - r_2}, \quad x_k^{(i)} = \frac{r_1 x_k^{(2)} + r_2 x_k^{(1)}}{r_1 + r_2}$$

die Koordinaten dieser Punkte $A_{1,2}$, $I_{1,2}$.

Wir setzen nun voraus, $n+1$ Kugelräume $K_n(M_k, r_k)$, $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$, seien im R_n willkürlich gegeben, und untersuchen die Lagenverhältnisse ihrer $(n+1)_2$ Paare von Ähnlichkeitspunkten $(A_{p,q}, I_{p,q})$. Dazu schicken wir die Bemerkung voraus, daß die drei Paare von Ähnlichkeitspunkten dreier Kugelräume $K_n(M_i, r_i)$, $(i = 1, 2, 3)$, die Paare von Gegenecken eines vollständigen Vierseits bilden, indem jedes der vier Punktetripel

$$(A_{12} A_{13} A_{23}), \quad (A_{12} I_{13} I_{23}), \quad (I_{12} A_{13} I_{23}), \quad (I_{12} I_{13} A_{23})$$

aus drei Punkten der nämlichen Gerade besteht; in dieser Reihenfolge mögen diese Geraden durch die Symbole

$$g_{123}\,, \qquad g_{12}^{(3)}\,, \qquad g_{13}^{(2)}\,, \qquad g_{23}^{(1)}$$

bezeichnet werden. Wir betrachten nun weiter die $n-1$ Geradenpaare $(g_{12p}, g_{12}^{(p)})$ durch A_{12} und die $n-1$ Geradenpaare $(g_{1p}^{(2)}, g_{2p}^{(1)})$ durch I_{12}, wo p der Reihe nach den Wert $3, 4, \ldots, n+1$ annimmt. Es bestimmen dann $n-1$ Geraden g durch A_{12} — oder durch I_{12} —, von welchen niemals zwei dem nämlichen Paare angehören, einen Raum R_{n-1}, welcher von jedem der $(n+1)_2$ Paare $(A_{p,q}, I_{p,q})$ von Ähnlichkeitspunkten einen Punkt enthält. So enthält irgend einer dieser Räume R_{n-1} durch A_{12} den Punkt $A_{p,q}$ oder den Punkt $I_{p,q}$, je nachdem die gewählten Geraden g, welche außer 1 und 2 den dritten Index p oder q tragen, gleichartig oder ungleichartig sind, und es trifft bei den Räumen R_{n-1} durch I_{12} gerade das entgegengesetzte zu. Weil die Wahl der Geraden g in beiden Fällen einer Anzahl von $n-1$ Bifurkationen entspricht, so gibt es 2^{n-1} dieser Räume durch jeden der Punkte A_{12}, B_{12}, d. h.:

„Es gibt 2^n Räume R_{n-1}, deren jeder von jedem der $(n+1)_2$ Paare $(A_{p,q}, I_{p,q})$ von Ähnlichkeitspunkten eines Systems von $n+1$ willkürlich im R_n gegebenen Kugelräumen K_n einen Punkt enthält."

Zur weiteren Untersuchung der *Konfiguration der Ähnlichkeitspunkte* führen wir eine bestimmte Bezeichnungsweise ein. Bezeichnet man — um Anhäufung von Indizes zu vermeiden — Punkte mit a, Geraden mit b, Ebenen mit c, Räume mit d, usw., so können a_{12} und a_1^2 den äußeren und den inneren Ähnlichkeitspunkt der Kugelräume $K_n^{(1)}$ und $K_n^{(2)}$, b_{123} und $b_{12}^{3)}$ die Geraden $(a_{12}\,a_{13}\,a_{23})$ und $(a_{12}\,a_1^3\,a_2^3)$, c_{1234}, c_{123}^4 und c_{12}^{34} die Ebenen $(b_{123}\,b_{124}\,b_{134}\,b_{234})$, $(b_{123}\,b_{12}^4\,b_{13}^4\,b_{23}^4)$ und $(b_{12}^3\,b_{12}^4\,b_1^{34}\,b_2^{34})$, d_{12345}, d_{1234}^5 und d_{123}^{45} die Räume $(c_{1234}\,c_{1235}\ldots)$, $(c_{1234}\,c_{123}^5\ldots)$ und $(c_{123}^4\,c_{123}^5\ldots.)$ andeuten, usw., — wobei es dann gleichgültig ist, ob man a_1^2 oder a_2^1 schreibt, usw. So findet man leicht, daß die in Rede stehende Konfiguration aus $2^{p+1}(n+1)_{p+2}$ Räumen R_p besteht, wo p der Reihe nach die Werte $0, 1, 2, \ldots, n-1$ annimmt, und daß dieser Konfiguration die Eigenschaft zukommt, daß für $p<q$ jeder Raum R_p in $(q+2)_{p+2}$ Räumen R_q

liegt, und jeder Raum R_q umgekehrt $2^{q-p}(n-p-1)_{q-1}$ Räume R_p enthält. Wirklich hat man, wie es sein soll,

$$2^{q-p}(n-p-1)_{q-1} \cdot 2^{p+1}(n+1)_{p+2} = (q+2)_{p+2} \cdot 2^{q+1}(n+1)_{q+2}.$$

Für $n = 6$ entspricht dieser Konfiguration folgendes Schema,

	0	1	2	3	4	5
0	**42**	3	6	10	15	21
1	10	**140**	4	10	20	35
2	40	8	**280**	5	15	35
3	80	24	6	**336**	6	21
4	80	32	12	4	**224**	7
5	32	16	8	4	2	**64**

wo hinsichtlich der Hauptdiagonale links unten die Zahl der in einem R_q enthaltenen R_p, rechts oben die Zahl der durch einen R_p gehenden R_q gegeben ist.

93. Die Kugelräume K_n, welche $n+1$ willkürlich im R_n gegebene Kugelräume K_n berühren. Aus der Figur 85 und ihren bekannten Maßverhältnissen

$$\left\{\begin{array}{ll} AP_1^a : AP_2 = r_1 : +r_2\,, & AP_1^a \cdot AP_2^a = AC_1^a \cdot AC_2 \\ IP_1^i : IP_2 = r_1 : -r_2\,, & IP_1^i \cdot IP_2^i = IC_1^i \cdot IC_2 \end{array}\right\}$$

leitet man folgende allgemeine Sätze ab:

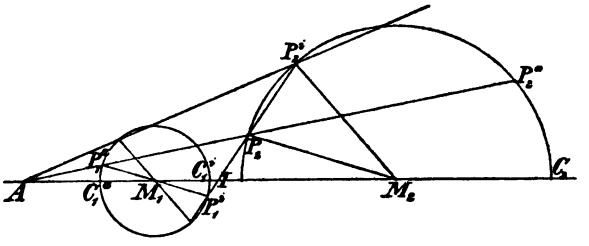


Fig. 85.

„Die Kugelräume $K_n^{(1)}$ und $K_n^{(2)}$ sind ähnlich und positiv ähnlich liegend mit A, ähnlich und negativ ähnlich liegend

mit I als Ähnlichkeitspunkt; in beiden Fällen ist $r_1 : \pm r_2$ das Ähnlichkeitsverhältnis. Die einander entsprechenden Punkte, P_1^a und P_2 im ersten und P_1^i und P_2 im zweiten Falle, werden *homolog* genannt."

„Die Kugelräume $K_n^{(1)}$ und $K_n^{(2)}$ entsprechen einander in einer Verwandtschaft der reziproken Radien mit A als Mittelpunkt und $AC_1^a \cdot AC_2$ als positiver Potenz, und in einer Verwandtschaft der reziproken Radien mit I als Mittelpunkt und $IC_1^i \cdot IC_2$ als negativer Potenz, welche der Reihe nach durch die Symbole $A(1, 2)$ und $I(1, 2)$ bezeichnet werden mögen. Die einander entsprechenden Punkte, P_1^a und P_2^a im ersten und P_1^i und P_2^i im zweiten Falle, werden *antihomolog* genannt."

„Jeder Kugelraum K_n durch irgend zwei antihomologe Punkte P_1 und P_2 von $K_n^{(1)}$ und $K_n^{(2)}$ schneidet diese unter gleichen Winkeln. Berührt K_n insbesondere $K_n^{(1)}$ in P_1, so berührt er $K_n^{(2)}$ in P_2. Und diese Berührungen sind gleichartig oder ungleichartig, je nachdem A oder I der Mittelpunkt der Verwandtschaft ist."

In Verbindung mit dem allgemeinen Satze der vorhergehenden Nummer bilden der zweite und dritte dieser einfachen Sätze die Grundlage einer Lösungsmethode des jetzt vorliegenden Problems einen Kugelraum K_n zu konstruieren, welcher $n+1$ willkürlich im R_n gegebene Kugelräume $K_n^{(1)}, K_n^{(2)}, \ldots, K_n^{(n+1)}$ sämtlich berührt. Wie wir sehen werden, entspricht jedem der 2^n Räume R_{n-1} durch $(n+1)_2$ Ähnlichkeitspunkte ein Paar berührender Kugelräume K_n, und ist die Berührung irgend eines dieser beiden Kugelräume mit $K_n^{(p)}$ und $K_n^{(q)}$ eine gleichartige oder eine ungleichartige, je nachdem der gewählte Raum R_{n-1} entweder A_{pq} oder I_{pq} enthält; also ist 2^{n+1} die theoretische Zahl der Lösungen. Und deutet man äußere und innere Berührung der Reihe nach durch die Zeichen Plus und Minus an, so entsprechen den 2^n Paaren von Lösungen alle Paare von einander völlig entgegengesetzten Zeichenkombinationen der aus $n+1$ Gliedern bestehenden Reihe

$$\pm\pm\pm\cdots\cdots\pm,$$

wobei immer zwei einander gleiche oder entgegengesetzte Kombinationen ein Paar bilden.

Folgende Konstruktion des speziellen Falles $n = 4$ läßt sich fast wörtlich auf den allgemeinen Fall eines willkürlichen n ausdehnen:

„Sind im Raume R_4 die fünf Kugelräume $K_4^{(1)}, K_4^{(2)}, \ldots, K_4^{(5)}$ willkürlich gegeben, ist d_{123}^{45} der Raum

$$(A_{12}\, A_{13}\, A_{23}\, A_{45}\, I_{14}\, I_{24}\, I_{34}\, I_{15}\, I_{25}\, I_{35})$$

und P_1 ein ganz willkürlicher Punkt von $K_4^{(1)}$, so bestimme man die antihomologen Punkte P_2, P_3, P_4, P_5 von P_1 in den Verwandtschaften $A(1, 2), A(1, 3), I(1, 4), I(1, 5)$ und den die fünf Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_5$ enthaltenden Kugelraum $K_4^{(p)}$."

„Ist ε_1 die Schnittebene von d_{123}^{45} mit dem Potenzraume $R_3^{(1,p)}$ von $K_4^{(1)}$ und $K_4^{(p)}$, so lege man durch ε_1 zwei Berührungsräume [90] an $K_4^{(1)}$, welche diesen Kugelraum in Q_1 und Q_1' berühren mögen."

„Endlich bestimme man die Punktepaare (Q_2, Q_2'), (Q_3, Q_3'), (Q_4, Q_4'), (Q_5, Q_5'), welche dem Paare (Q_1, Q_1') entsprechen in den Verwandtschaften $A(1, 2)$, $A(1, 3)$, $I(1, 4)$, $I(1, 5)$, und die durch $Q_1, Q_2, \ldots, Q_5$ und $Q_1', Q_2', \ldots, Q_5'$ bestimmten Kugelräume $K_4^{(q)}$ und $K_4^{(q')}$; diese Kugelräume $K_4^{(q)}$ und $K_4^{(q')}$ bilden nun zwei Lösungen der Aufgabe."

Der Beweis obiger Konstruktion ist einfach. Bei Bewegung von P_1 über $K_4^{(1)}$ ändert sich die Potenz von keinem der zehn Ähnlichkeitspunkte des Raumes d_{123}^{45} in bezug auf $K_4^{(p)}$; deshalb bilden die überhaupt möglichen Kugelräume $K_4^{(p)}$ ein Büschel mit d_{123}^{45} als gemeinschaftlichem Potenzraume und ist ε_1 gemeinschaftliche Potenzebene von $K_4^{(1)}$ mit allen $K_4^{(p)}$. Wählt man nun für P einen der beiden Berührungspunkte von $K_4^{(1)}$ mit einem Raume durch ε_1, so muß dieser Berührungsraum im nämlichen Punkte ebenfalls den durch diesen Berührungspunkt gehenden Kugelraum $K_4^{(p)}$ berühren, usw.

94. Die Kugelräume K_n, welche $n+1$ Räume R_{n-1} berühren. Betrachtet man das von den $n+1$ Räumen R_{n-1} eingeschlossene Simplex $S(n+1)$, dessen Eckpunkte mit $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ bezeichnet werden sollen, als das Koordinatensimplex eines Systems homogener Abstandskoordinaten, so ergibt sich unmittelbar, daß es im allgemeinen 2^n Kugel-

räume K_n gibt, welche $n+1$ gegebene Räume R_{n-1} berühren. Denn die Koordinaten des Mittelpunktes irgend eines dieser Kugelräume K_n erscheinen in der Sammelform

$$(\pm a, \pm a, \pm a, \ldots, \pm a),$$

welche $n+1$ Bifurkationen $\pm a$ enthält, während zwei einander völlig entgegengesetzte Zeichenkombinationen den nämlichen Punkt kennzeichnen. Und diese Gruppe von 2^n Kugelräumen K_n kann man nach der Anzahl m der Minuszeichen dieses Symbols, welche mit der Lage des Mittelpunktes in bezug auf die Raumteile (3) des R_n in Verbindung steht, zerlegen in einen eingeschriebenen Kugelraum, $(n+1)_1$ angeschriebene Kugelräume, usw. nach dem Schema

Anzahl	Charakter der Raumteile	Werte von m
1	$A_1 A_2 A_3 A_4 \ldots A_{n+1}$	0 oder $n+1$
$(n+1)_1$	$A_1, A_2 A_3 A_4 \ldots A_{n+1}$	1 „ n
$(n+1)_2$	$A_1 A_2, A_3 A_4 \ldots A_{n+1}$	2 „ $n-1$
⋮	⋮	⋮

welches in der ersten Kolonne schließt mit

$(n+1)_{\frac{n}{2}}$, $m = \frac{n}{2}$ oder $\frac{n}{2}+1$	$\frac{1}{2}(n+1)_{\frac{n+1}{2}}$, $m = \frac{n+1}{2}$
(n gerade),	(n ungerade).

Bekanntlich enthält jedes der mittleren Symbole mit Ausnahme des Simplex selbst zwei Raumteile, welche im Unendlichen zusammenhängen; welcher dieser beiden Raumteile erhält den entsprechenden Mittelpunkt? In allen Fällen liegt der Mittelpunkt in demjenigen Raumteile, welcher die größte Zahl von Eckpunkten des Simplex trägt; nur bei ungeradem n tritt für $m = \frac{n+1}{2}$ Unbestimmtheit ein. Wir beleuchten diesen Punkt durch ein Beispiel. Sei $n = 7$ und der in Rede stehende Mittelpunkt durch das Symbol

$$(+a, +a, +a, +a, -a, -a, -a, -a)$$

gekennzeichnet. Sind nun $I_1, I_2, \ldots, I_8$ die sechsdimen-

sionalen Inhalte der begrenzenden Simplexe $(A_2 A_3 \ldots A_8)$, $(A_1 A_3 \ldots A_8) \ldots$, $(A_1 A_2 \ldots A_7)$, und ist V der siebendimensionale Inhalt des Simplex $(A_1 A_2 \ldots A_8)$, so hat man die Beziehung

$$a[(I_1 + I_2 + I_3 + I_4) - (I_5 + I_6 + I_7 + I_8)] = 7\,V,$$

d. h. es ist a positiv, negativ oder unendlich, je nachdem

$$(I_1 + I_2 + I_3 + I_4) - (I_5 + I_6 + I_7 + I_8)$$

positiv, negativ oder Null ist. Im ersten Fall liegt der Mittelpunkt auf der Seite von $A_1 A_2 A_3 A_4$, im zweiten auf der Seite von $A_5 A_6 A_7 A_8$, und im dritten verschwindet er ins Unendliche.

Die Konstruktion der Mittelpunkte der berührenden Kugelräume gelangt selbstverständlich zur Ausführung mit Hilfe der Paare von Räumen R_{n-1}, welche die Winkel des Simplex hälften. Sind A_1, A_2 wieder zwei Eckpunkte des Simplex, $R^{(1)}_{n-1}$, $R^{(2)}_{n-1}$ die gegenüberliegenden Grenzräume und $T_i^{(1,2)}$, $T_a^{(1,2)}$ der innere und der äußere Teilraum des Winkels $(R^{(1)}_{n-1}, R^{(2)}_{n-1})$, so enthält $T_i^{(1,2)}$ alle Mittelpunkte $(1, 1, \ldots)$ und $T_a^{(1,2)}$ alle Mittelpunkte $(1, -1, \ldots)$. Also gilt der Satz:

„Es gibt 2^n Punkte M, — die Mittelpunkte der die Grenzräume eines Simplex $S(n+1)$ berührenden Kugelräume K_n, — deren jeder enthalten ist in einem der beiden Räume T_{n-1} jedes der $(n+1)_2$ Paare von Teilräumen $(T_i^{(p,q)}, T_a^{(p,q)})$."

Es steht dieser Satz in einer nicht zu verkennenden reziproken Beziehung zum allgemeinen Satze der Nr. 92. Wirklich ist die *Konfiguration der Teilräumepaare* derjenigen der Paare von Ähnlichkeitspunkten völlig reziprok. Denn die sich auf das Koordinatensimplex $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$ beziehende Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{r_i}{h_i} y_i x_i = 0$$

in normalen Abstandskoordinaten weist dem Punkte mit den Punktkoordinaten y_k einen $(n-1)$-dimensionalen Raum mit den Raumkoordinaten $\frac{r_k}{h_k} y_k$ zu, und in dieser Reziprozität

entsprechen den Ähnlichkeitspunkten $A_{1,2}$, $I_{1,2}$ die Teilräume $T_a^{(1,2)}$, $T_i^{(1,2)}$, wenn die r_k die Radien der Kugelräume $K_n(A_k, r_k)$ der Nr. 92 und die h_k die Höhen des Simplex $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$ sind. Hierdurch sind die charakteristischen Eigenschaften der Konfiguration der Teilräume aus denen der Konfiguration der Ähnlichkeitspunkte abzuleiten.

Aufgabe 84. Beweise, daß die Berührungspunkte der 2^n berührenden Kugelräume K_n mit dem Grenzraume $R_{n-1}^{(n+1)}$ durch $A_1, A_2, \ldots, A_n$ zu zweien auf 2^{n-1} Geraden durch A_1, auf 2^{n-1} Geraden durch A_2, usw., auf 2^{n-1} Geraden durch A_n und auf 2^{n-1} Geraden durch die Projektion A'_{n+1} von A_{n+1} auf $R_{n-1}^{(n+1)}$ liegen.

Aufgabe 85. Beweise, daß zwei der 2^n Berührungspunkte, welche mit der Projektion A'_{n+1} von A_{n+1} auf $R_{n-1}^{(n+1)}$ in einer Gerade liegen, in bezug auf $A_1 A_2 \ldots A_n$ als Koordinatensimplex normale Abstandskoordinaten $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ besitzen, zwischen welchen die Beziehungen

$$x_1 y_1 = x_2 y_2 = \ldots = x_n y_n$$

bestehen.

[Sind M, M' die betrachteten Mittelpunkte und bezeichnen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ diejenigen an $R_{n-1}^{(n+1)}$ liegenden Winkel des Simplex $S(n+1)$, welche zur Bestimmung von M gehälftet werden müssen, so ergibt sich mittels der rechtwinkligen Dreiecke, welche M (oder M'), die Projektion $\overline{M}$ (oder $\overline{M'}$) von M (oder M') auf $R_{n-1}^{(n+1)}$, und die Projektion von M (oder $\overline{M}$) auf einen der n begrenzenden Räume R_{n-2} von $R_{n-1}^{(n+1)}$ zu Eckpunkten haben, daß die normalen Abstandskoordinaten der Projektionen $\overline{M}$, $\overline{M'}$, A'_{n+1} in bezug auf das System mit $A_1 A_2 \ldots A_n$ als Koordinatensimplex die horizontalen Reihen der Matrix

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha_1, & \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha_2, & \ldots, & \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha_n \\ \cot\frac{1}{2}\alpha_1, & \cot\frac{1}{2}\alpha_2, & \ldots, & \cot\frac{1}{2}\alpha_n \\ \cot\alpha_1, & \cot\alpha_2, & \ldots, & \cot\alpha_n \end{vmatrix}$$

bilden. Und nun beweist man leicht, daß alle in dieser Matrix enthaltenen Determinanten dritten Grades verschwinden.]

Aufgabe 86. Ein in unserem Raume gegebenes Tetraeder $ABCD$ bildet einen Grenzraum eines Simplex $ABCDE$, welches weiter durch die Längen der Kanten AE, BE, CE, DE durch den nicht im unserem Raume liegenden fünften Eckpunkt E bestimmt ist. Man verlangt die Punkte zu konstruieren, in welchen der Grenzraum $ABCD$ berührt wird von den sechzehn Kugelräumen K_4, welche die fünf Grenzräume des Simplex berühren.

[Von den nicht in unserem Raume liegenden begrenzenden Tetraedern $BCDE$, usw. kennt man die Kantensextupel. Deshalb kann man sich diese Tetraeder $BCDE$, usw. nicht nur um die mit $ABCD$ gemeinsame Seitenfläche BCD, usw. nach beiden Seiten hin in unseren Raum umgelegt *denken*, sondern sogar die Punktepaare (E_a^+, E_a^-), usw. konstruieren, wo E bei dieser Bewegung anlangt, wobei E_a^+, usw. dann immer den Punkt bezeichnet, welcher mit A, usw. auf verschiedenen Seiten der Gegenfläche BCD, usw. liegt. Es sind nun die Mittelpunkte der sechzehn Kugeln $(E_a^\pm E_b^\pm E_c^\pm E_d^\pm)$, wo alle Zeichenkombinationen auftreten, die gesuchten Berührungspunkte.

Diese Lösung bildet die vierdimensionale Verallgemeinerung der genialen Hermaryschen beim analogen Probleme im R_3. Man vergleiche Hermarys Aufsatz (*Bulletin de la Société mathématique de France*, T. VII).]

[Eine einfache Betrachtung der Gleichung $\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 x_k^2 = 0$, wo die Koeffizienten a_k der Bedingung $\sum_{k=1}^{n+1} a_k = 0$ Genüge leisten, zeigt unmittelbar, daß die 2^n Mittelpunkte der die Grenzräume R_{n-1} des Simplex $S(n+1)$ berührenden Kugelräume K_n die Basispunkte eines n-fach unendlichen linearen Systems von quadratischen Räumen $Q_n^{(2)}$ sind, welches das Simplex zum gemeinschaftlichen Polsimplex hat. Umgekehrt bilden deshalb die 2^n bei der Konfiguration der Ähnlichkeitspunkte auftretenden Räume R_{n-1} die gemeinschaftlichen Berührungsräume eines n-fach unendlichen linearen tangentiellen Systems von quadratischen Räumen $Q_n^{(2)}$ mit $S(n+1)$ als Polsimplex.

Für die Berechnung der Anzahlen von Räumen $Q_3^{(2)}$, $Q_4^{(2)}$, $Q_5^{(2)}$, welche respektive 9, 14, 20 einfachen Bedingungen

Genüge leisten, verweisen wir auf die einschlägigen Arbeiten von H. Schubert, dem Verfasser und A. Toxopeus, *Journ. v. Crelle*, Bd. 71, S. 366, 1870, *Math. Ann.*, Bd. 45, S. 153, 1894, *Verhand. der Akademie von Amsterdam*, Bd 7, Nr. 4, 1900 und Bd. 9, Nr. 1, 1905, usw.]

95. Inhalt und Oberfläche des Kugelraumes. Der Inhalt I und die Oberfläche O eines Kugelraumes K_n sind bekanntlich durch die allgemeine Beziehung

$$I = \frac{1}{n} O \cdot r$$

miteinander verknüpft, wenn r der Radius des K_n ist. Teilt man nämlich die Oberfläche des Kugelraumes in eine große Anzahl sehr kleiner Polytope (Po) ein und betrachtet jedes dieser Polytope als Grundpolytop einer Pyramide (Py), deren Scheitel mit dem Mittelpunkte des Kugelraumes zusammenfällt, so hat man

$$\text{Inhalt } (Py) = \frac{1}{n} r \cdot \text{Inhalt } (Po)$$

und hieraus folgt obige Beziehung durch Summation. Sie wird hier an die Spitze gestellt, weil sie uns erlaubt, uns auf die Integrationsbestimmung des Inhaltes zu beschränken.

Versteht man unter $I_n(r)$ den Inhalt eines K_n mit dem Radius r, so hat man offenbar:

$$I_n(r) = \int_{-r}^{r} I_{n-1}\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right) dx ,$$

und es gibt sodann die Substitution $x = r \sin\varphi$

$$I_n(r) = r \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} I_{n-1}(r\cos\varphi)\cos\varphi \, d\varphi .$$

Nun folgt aber aus Ähnlichkeitsgründen unmittelbar

$$I_n(r) = a_n r^n ,$$

wo a_n eine von r unabhängige Größe ist. Also findet man

$$a_n = a_{n-1} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^n\varphi \, d\varphi$$

und mittels der bekannten Formeln

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^{2m}\varphi\,d\varphi &= \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots 3\cdot 1}{2m(2m-2)\ldots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\\ \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^{2m-1}\varphi\,d\varphi &= \frac{(2m-2)(2m-4)\ldots 4\cdot 2}{(2m-1)(2m-3)\ldots 5\cdot 3}\end{aligned}\right\}$$

zunächst

$$\left.\begin{aligned}a_{2m} &= \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots 3\cdot 1}{2m(2m-2)\ldots 4\cdot 2}\pi\cdot a_{2m-1}\\ a_{2m-1} &= \frac{(2m-2)(2m-4)\ldots 4\cdot 2}{(2m-1)(2m-3)\ldots 5\cdot 3}\cdot 2\,a_{2m-2}\end{aligned}\right\}$$

und sodann

$$a_{2m} = \frac{\pi}{m}a_{2m-2},\quad a_{2m-1} = \frac{2\pi}{2m-1}a_{2m-3},$$

oder allgemein

$$a_n = \frac{2\pi}{n}a_{n-2}.$$

Deshalb ist schließlich, weil $a_2 = \pi$ und $a_1 = 2$ ist,

$$I_{2m}(r) = \frac{\pi^m r^{2m}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m},\quad I_{2m-1}(r) = \frac{2^m\pi^{m-1}r^{2m-1}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)},$$

oder allgemein mittels der Gammafunktion

$$I_n(r) = \frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}r^n.$$

Und für die Oberfläche findet man

$$O_{2m}(r) = \frac{\pi^m r^{2m-1}}{3\cdot 4\cdot 5\ldots(m-1)},\quad O_{2m-1}(r) = \frac{2^m\pi^{m-1}r^{2m-2}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-3)},$$

oder allgemein

$$O_n(r) = \frac{n[\Gamma(\frac{1}{2})]^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}r^{n-1}.$$

Setzt man allgemein

$$O_n(r) = b_n r^{n-1},$$

so folgt aus den Beziehungen zwischen $I_n(r)$, $O_n(r)$ einerseits

$$b_n = n a_n$$

und aus den Beziehungen zwischen a_n und a_{n-2} andererseits

$$b_n = \frac{2\pi}{n-2} b_{n-2}.$$

Für $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ hat man also die Reihen

$O(r) \ldots 2\pi r,\ 4\pi r^2,\ 2\pi^2 r^3,\ \frac{8}{3}\pi^2 r^4,\ \pi^3 r^5,\ \frac{16}{15}\pi^3 r_6, \ldots$

$I(r) \ldots \pi r^2,\ \frac{4}{3}\pi r^3,\ \frac{1}{2}\pi^2 r^4,\ \frac{8}{15}\pi^2 r^5,\ \frac{1}{6}\pi^3 r^6,\ \frac{16}{105}\pi^3 r^7, \ldots$

96. Der Inhalt des Kugelraumsegmentes und der Kugelraumschicht. Ist $I_n(r, h)$ der Inhalt des Segmentes des Kugelraumes K_n vom Radius r und der Höhe h, und $I_n(r, h_1, h_2)$ der Inhalt der Schicht des nämlichen Kugelraumes, enthalten zwischen zwei parallelen Räumen R_{n-1}, welche vom Mittelpunkte die Abstände $r - h_1$, $r - h_2$ haben, so ist für den allgemeineren Fall der Schicht

$$I_n(r, h_1, h_2) = \int_{r-h_2}^{r-h_1} I_{n-1}(\sqrt{r^2 - x^2})\, dx,$$

wo $I_{n-1}(\sqrt{r^2 - x^2})$ wieder den Inhalt des Kugelraumes K_{n-1} mit dem Radius $\sqrt{r^2 - x^2}$ bezeichnet. Daher findet man:

$$\left.\begin{aligned} I_{2m}(r, h_1, h_2) &= \frac{2^m \pi^{m-1} r^{2m}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-1)} \int_{\arcsin\frac{r-h_2}{r}}^{\arcsin\frac{r-h_1}{r}} \cos\varphi^{2m}\, d\varphi \\ I_{2m-1}(r, h_1, h_2) &= \frac{\pi^{m-1} r^{2m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)} \int_{\arcsin\frac{r-h_2}{r}}^{\arcsin\frac{r-h_1}{r}} \cos\varphi^{2m-1}\, d\varphi \end{aligned}\right\},$$

von welchen beiden Integralen das erste goniometrisch, das zweite algebraisch ist. Und für $h_1 = 0$, $h_2 = h$ geht die Schicht in ein Segment über.

Aufgabe 87. Betrachte die Fälle $n = 4$ und $n = 5$ etwas näher.

[Man findet für $h_1 = \mu_1 r$ und $h_2 = \mu_2 r$

$$I_4(r, h_1, h_2) = \tfrac{1}{6}\pi r^4 \{(3 + 4\mu_2 - 2\mu_2^2)\sqrt{2\mu_2 - \mu_2^2} - (3 + 4\mu_1 - 2\mu_1^2)\sqrt{2\mu_1 - \mu_1^2} - 3[\arcsin(1 - \mu_2) - \arcsin(1 - \mu_1)]\},$$

$$I_5(r, h_1, h_2) = \tfrac{1}{30}\pi^2 r^5 \{\mu_2^3(20 - 15\mu_2 + 3\mu_2^2) - \mu_1^3(20 - 15\mu_1 + 3\mu_1^2)\}$$

und deshalb für das Segment, wo $h = \mu r$ ist,

$$I_4(r, h) = \tfrac{1}{6}\pi r^4 \{(3 + 4\mu - 2\mu^2)\sqrt{2\mu - \mu^2} - 3\arccos(1 - \mu)\},$$
$$I_5(r, h) = \tfrac{1}{30}\pi^2 r^5 \mu^3 (20 - 15\mu + 3\mu^2).]$$

97. Das sphärische Simplex. Denkt man sich auf der Oberfläche des Kugelraumes K_4 des R_4 vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 willkürlich angenommen und diese Punkte zu je zwei und zwei durch kleinste Bogen von Großkreisen, zu je drei und drei durch sphärische Dreiecke von Großkugeln verbunden, so entsteht auf der Oberfläche des Kugelraumes K_4 ein krummliniges Tetraeder, dessen sechs Kanten Kreisbogen und dessen vier Seitenflächen sphärische Dreiecke sind.

Behufs Verallgemeinerung auf R_n nennen wir diese Figur (I 130) ein sphärisches Simplex, welchem das Symbol $Sp(4)$ entsprechen möge; die bei ihr auftretenden Winkelbeziehungen sind früher (I 132) gegeben worden.

Es ist nun wohl unmittelbar klar, was man unter einem sphärischen Simplex $Sp(n)$ des Kugelraumes K_n im R_n zu verstehen hat. Dieses „krummlinige Simplex $S(n)$" hat $(n)_2$ Kreisbogen zu Kanten, $(n)_3$ sphärische Dreiecke zu Seitenflächen, $(n)_4$ sphärische Tetraeder zu Seitenräumen, usw. Es ist bestimmt, sobald man auf irgend einem Kugelraume $K_n(M, r)$ des R_n die n Eckpunkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ willkürlich angenommen hat. Seine Konstantenzahl in bezug auf den als gegeben betrachteten Kugelraum $K_n(M, r)$ ist also $n(n-1)$, seine Konstantenzahl im R_n ist $n^2 + 1$.

Die Bestimmung des $(n-1)$-dimensionalen Inhalts des sphärischen Simplex $Sp(n)$ bildet eines der schwierigsten Probleme, zu deren Lösung uns das Studium der mehr-

dimensionalen Geometrie auffordert, und geht also weit über die Grenzen dieses Lehrbuches hinaus.

In der öfters erwähnten Abhandlung bewies Schläfli, daß der Inhalt des sphärischen Simplex $Sp(2n+1)$ sich aus den Inhalten der begrenzenden sphärischen Simplexe von geringerer Dimensionenzahl ableiten läßt, während die sphärischen Simplexe $Sp(2n)$ keine einfache Bestimmung ihres Inhalts zulassen[1]). Dies steht in Verbindung mit der Tatsache, daß der für konvexe Polytope geltende n-dimensionale Eulersche Satz für gerades n eine homogene, für ungerades n eine nicht-homogene Gleichung ist. Vom sphärischen Tetraeder, zu gleicher Zeit das Tetraeder einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit von konstanter positiver Krümmung, ist nur in speziellen Fällen der Inhalt gefunden worden.

Aufgabe 88. Von einem sphärischen Tetraeder sind drei durch den nämlichen Eckpunkt gehende Kanten 90^0 gegeben. Drücke den Inhalt dieses Tetraeders durch den Radius des Kugelraumes und die drei übrigen Kanten aus.

Aufgabe 89. Von einem sphärischen Simplex $Sp(n)$ sind $n-1$ durch den nämlichen Eckpunkt gehende Kanten 90^0 gegeben. Drücke den Inhalt dieses $Sp(n)$ durch den Inhalt des diesem Eckpunkte gegenüberliegenden sphärischen Simplex $Sp(n-1)$ und durch den Radius des Kugelraumes aus.

---

§ 10. Die Kegel- und Cylinderräume.

98. Allgemeines. Eine Pyramide s-ter Stufe $(k+s)$-ter Dimension, welche durch das Symbol $Py[(Po)_k, S(s)]$ bezeichnet worden ist [12]), wird ein Kegelraum s-ter Stufe $(k+s)$-ter Dimension, sobald die Basis $(Po)_k$ nicht ausschließlich von linearen Räumen R_{k-1} begrenzt wird. Versinnlichen wir diese Abweichung der Linearität bei $(Po)_k$ dadurch, daß wir das Symbol überstreichen, so kann obiger Kegelraum als $Ke[(\overline{Po})_k, S(s)]$ bezeichnet werden. Dieses Gebilde

[1]) Man vergleiche auch einen kleinen Aufsatz des Herrn H. Poincaré (*Comptes rendus*, Bd. 140, S. 113, 1905).

ist wieder der Ort des Geradensegmentes OP, welches irgend einen Punkt O innerhalb des Simplex $S(s)$ und irgend einen Punkt P innerhalb der Basis $(\overline{Po})_k$ zu Endpunkten hat. Ist $k+s=n$, der Kegelraum also ein $Ke[(\overline{Po})_k, S(n-k)]$ und ein $Ke[(\overline{Po})_{n-s}, S(s)]$, so kann man die $n-2$ verschiedenen Fälle, wo (k, s) der Reihe nach $(n-1, 1)$, $(n-2, 2), \ldots, (2, n-2)$ ist, unterscheiden.

Ist die Basis insbesondere ein Kugelraum, so nennen wir den Kegelraum sphärisch. Dieser sphärische Kegelraum ist dann weiter gerade oder schief, je nachdem der Raum R_s durch den Mittelpunkt M des Kugelraumes und das Simplex $S(s)$ der Scheitel in M zum Raume R_k des Kugelraumes senkrecht ist oder nicht. Und der gerade Kegelraum möge regulär heißen, falls $S(s)$ ein reguläres Simplex ist, welches die Projektion des Kugelraummittelpunktes M auf seinen Raum R_{s-1} zum Mittelpunkte hat. Deshalb ist ein rechter Kegelraum erster Stufe immer regulär. Und das einfachste Beispiel eines regulären Kegelraumes höherer Stufe zeigt Figur 86. Von der kreisförmigen Basis ist nur ein Quadrant AOB gezeichnet worden, und C, D sind die zwei Scheitel; ist P die Mitte von CD, so sind OA, OB, PC, OP Richtungen von Achsen OX_1, OX_2, OX_3, OX_4 eines rechtwinkligen Systems von R_4. Weiter zeigt die Figur den Schnitt des vierdimensionalen Kegelraumes mit dem in O' zu OP senkrechten Raume, einen geraden Kreiscylinder mit $O'A' = O'B'$ als Radius des Basiskreises und $C'D'$ als Höhe.

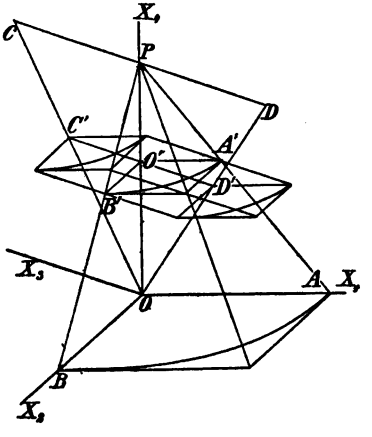


Fig. 86.

Ein Prisma s-ter Stufe $(k+s)$-ter Dimension [12] $Pr[(Po)_k, RV(s)]$ wird ein Cylinderraum s-ter Stufe $(k+s)$-ter Dimension $Cy[(\overline{Po})_k, RV(s)]$, wenn die Basis ein

$(\overline{Po})_k$, d. h. ein nicht ausschließlich von linearen Räumen R_{k-1} begrenztes Polytop ist. Ist $k + s = n$, der Cylinderraum also ein $Cy[(\overline{Po})_k, RV(n-k)]$ und ein $Cy[(\overline{Po})_{n-s}, RV(s)]$, so kann man wieder die $n-2$ verschiedenen Fälle betrachten, wo (k, s) der Reihe nach $(n-1, 1), (n-2, 2), \ldots, (2, n-2)$ ist.

Ist die Basis ein Kugelraum, so heißt der Cylinderraum sphärisch; dieser sphärische Cylinderraum wird gerade oder schief genannt, je nachdem der Raum R_{s-1} mit den s Richtungen $RV(s)$ zum Raume R_k des Kugelraumes senkrecht

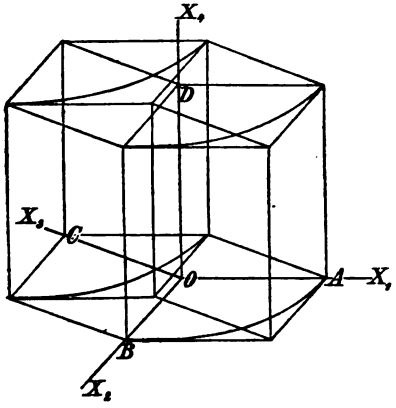


Fig. 87.

ist oder nicht. Und der gerade sphärische Cylinderraum möge regulär heißen, wenn die s gerichteten Strecken gleicher Länge und zu je zwei und zwei aufeinander senkrecht sind. Während ein gerader sphärischer Cylinderraum erster Stufe immer regulär ist, zeigt Fig. 87 das einfachste Beispiel eines regulären Cylinderraumes zweiter Stufe; von den kreisförmigen Endflächen sind wieder nur Quadranten AOB gezeichnet worden, und die Strecken OC und OD von $RV(2)$ sind gleich und zueinander senkrecht.

Aufgabe 90. Beschreibe die Querschnitte des letzteren vierdimensionalen Gebildes mit Räumen parallel zu den verschiedenen Koordinatenräumen.

Ist c_0' die Konstantenzahl der Basis $(\overline{Po})_k$ eines Kegel- oder Cylinderraumes mit Berücksichtigung ihrer Lage im tragenden Raume R_k, so ist

$$c' = c_0' + (n + k + 1)(n - k)$$

die Konstantenzahl des Kegelraumes $Ke[(\overline{Po})_k, S(n-k)]$ und des Cylinderraumes $Cy[(\overline{Po})_k, RV(n-k)]$ im R_n.

Aufgabe 91. Leite die Formeln

$$c_q' = 2(n+1)_2 - (k)_2, \qquad c_s' = 2(n+1)_2 - k^2 + n,$$
$$c_r' = 2(n+1)_2 - kn + 1, \qquad c_{\bar{r}}' = (n+2)_2 - (k+1)_2$$

ab, wo c_q', c_s', c_r', $c_{\bar{r}}'$ der Reihe nach die Konstantenzahlen eines quadratischen, eines sphärischen, eines geraden sphärischen und eines regulären Kegel- oder Cylinderraumes bezeichnen.

99. Kegel- und Cylinderräume in der analytischen Geometrie. Die im R_n enthaltenen Kegel- und Cylinderräume erster Stufe werden von verschiedenartigen Räumen begrenzt, und zwar der Kegelraum von einem Stück $(\overline{Po})_{n-1}$ eines linearen Raumes R_{n-1} und einem gebogenen $(n-1)$-dimensionalen Mantel Mk, der Cylinderraum von zwei equipollenten Stücken $(\overline{Po})_{n-1}$ zweier paralleler Räume R_{n-1} und einem gebogenen $(n-1)$-dimensionalen Mantel Mc. Bei der analytischen Darstellung entspricht jedem dieser Begrenzungsteile für sich eine Gleichung oder ein System von Gleichungen. Dabei tritt uns dann das Problem entgegen aus dem Systeme von Gleichungen, welches die Basis $(\overline{Po})_{n-1}$ in ihrem Raume R_{n-1} bestimmt, und den Koordinaten des Kegelraumscheitels oder den Richtungskonstanten der Cylinderraumerzeugenden das Gleichungssystem des nach allen Seiten hin unendlich ausgebreiteten Kegelraum- oder Cylinderraummantels herzuleiten; dabei beschränken wir uns auf den einfachen Fall, wo $(\overline{Po})_{n-1}$ in seinem Raume R_{n-1} durch eine einzige Gleichung bestimmt werden kann.

Die allgemeine Form der Gleichung der Mäntel Mk und Mc von Kegel- und Cylinderräumen in Parallelkoordinaten kann leicht angegeben werden. Zunächst stellt irgend eine homogene Gleichung zwischen den n Koordinaten x_i den

Mantel Mk eines Kegelraumes dar, welcher den Koordinatenanfangspunkt zum Scheitel hat, und es geht diese Gleichung bei Ersetzung von x_i durch $x_i - a_i$ in diejenige des Mantels Mk eines Kegelraumes mit dem Scheitel im willkürlichen Punkte a_i über. Und weiter entspricht einer Gleichung $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ der Mantel Mc eines Cylinderraumes, wenn sie sich in die Form $F(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}) = 0$ bringen läßt, wo $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ bestimmte in $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lineare Formen sind; dabei sind dann die Erzeugenden des Cylinderraumes zu der Schnittgerade der $(n-1)$-dimensionalen Räume $X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_{n-1} = 0$ parallel. In beiden Fällen des Mk und Mc gibt der Grad der erhaltenen Gleichung an, in wieviel Punkten der Mantel von irgend einer Geraden geschnitten wird.

100. Quadratische Kegel- und Cylinderräume. Rotationsräume. Durch Achsentransformation läßt sich die allgemeine homogene Gleichung zweiten Grades des quadratischen Kegelraumes erster Stufe mit dem Ursprunge als Scheitel immer auf die sich auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem beziehende Form

$$p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \ldots + p_n x_n^2 = 0$$

bringen, wo in speziellen Fällen einige der Koeffizienten p_i verschwinden oder einander gleich werden können. Falls q der Koeffizienten p_i verschwinden, ist das Gebilde zu gleicher Zeit ein Kegelraum $(q+1)$-ter und ein Cylinderraum q-ter Stufe; dies wird hier ausgeschlossen.

Ist $p_2 = p_1$, so erscheint die Gleichung in der Form

$$p_1(x_1^2 + x_2^2) + p_3 x_3^2 + \ldots + p_n x_n^2 = 0,$$

und es kann der Kegelraum deshalb durch Rotation seines Querschnittes mit irgend einem Raume R_{n-1} durch den $(n-2)$-dimensionalen Raum $x_1 = 0, x_2 = 0$ um letzteren Raum $O(X_3 X_4 \ldots X_n)$ erzeugt werden. Dabei beschreibt jeder Punkt P des kegelförmigen Schnittes einen Kreis $K_2(P', PP')$, dessen Ebene zu $O(X_1 X_2)$ parallel und dessen Mittelpunkt P' die Projektion von P auf den Rotationsraum $x_1 = 0, x_2 = 0$ ist.

Ist $p_3 = p_2 = p_1$, so nimmt die Gleichung die Form

$$p_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + p_4 x_4^2 + \ldots + p_n x_n^2 = 0$$

an, und es kann somit der Kegelraum durch Rotation seines Querschnittes mit irgend einem Raume R_{n-2} durch den $(n-3)$-dimensionalen Raum $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ um letzteren Raum entstehen. Es beschreibt dann jeder Punkt P des Schnittes eine Kugel $K_3(P', PP')$, deren Raum zu $O(X_1 X_2 X_3)$ parallel und deren Mittelpunkt P' die Projektion von P auf den Rotationsraum $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ ist.

So fortfahrend findet man allgemein:

Ist $p_k = p_{k-1} = \ldots = p_2 = p_1$, so ergibt sich die Gleichung

$$p_1(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2) + p_{k+1} x_{k+1}^2 + \ldots + p_n x_n^2 = 0,$$

und kann man somit den Kegelraum durch Rotation seines Querschnittes mit irgend einem Raume R_{n-k+1} durch den $(n-k)$-dimensionalen Raum $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\ldots$, $x_k = 0$ um letzteren Raum erzeugen. Jeder Punkt P des Schnittes durchläuft dann einen Kugelraum $K_k(P', PP')$, dessen Raum zu $O(X_1 X_2 \ldots X_k)$ parallel und dessen Mittelpunkt P' die Projektion von P auf den Rotationsraum $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\ldots$, $x_k = 0$ ist.

Zur Unterscheidung nennen wir die Rotation eine Rotation von der $(k-1)$-ten Potenz, wenn jeder Punkt einen Kugelraum K_k beschreibt.

Für $k = n - 1$ findet man einen Rotationskegelraum mit einer Achse und einem Scheitelwinkel. In der Form

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 = x_n^2 \operatorname{tang}^2 \alpha$$

ist OX_n die Achse und α der halbe Scheitelwinkel. Ein einfaches Beispiel dieses Falles ist der Kegelraum der von einem außerhalb eines Kugelraumes K_n gegebenen Punkte an diesen K_n zu legenden Tangenten.

Für $k = n$, d. h. wenn die sämtlichen Koeffizienten p_i einander gleich sind, findet man die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0$$

des Punktkugelraumes, welcher außer dem Koordinatenanfangspunkte keinen reellen Punkt zuläßt. Die imaginären uneigentlichen Punkte dieses Ortes sind allen Kugelräumen K_n gemeinsam.

Natürlich kann die Gleichheit von zwei oder mehreren Koeffizienten p_i mehrere Male auftreten; so findet man (I 9) im R_6 zehn verschiedene Fälle.

Wir lenken hierbei noch speziell die Aufmerksamkeit auf die Fälle, wo die Koeffizienten p_i aus zwei Gruppen gleicher Größen bestehen und jede dieser Gruppe mindestens zwei Koeffizienten enthält. Die Gleichung erscheint dann in der Form

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 = (x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2 + \ldots + x_n^2) \operatorname{tang}^2\alpha$$

und der entsprechende Kegelraum läßt, obgleich er immer nur einen Scheitel besitzt, zwei zueinander senkrechte Achsenräume zu, den Achsenraum $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_k = 0$ mit dem halben Scheitelwinkel α, und den Achsenraum $x_{k+1} = 0, x_{k+2} = 0, \ldots, x_n = 0$ mit dem halben Scheitelwinkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Dieser Kegelraum ist, wie sich bald [106] ergeben wird, zu gleicher Zeit der Ort eines um den ersten Achsenraum $R_{n-k}^{(a)} \equiv O(X_{k+1} X_{k+2} \ldots X_n)$ rotierenden Raumes R_k und eines um den zweiten Achsenraum $R_k^{(a)} \equiv O(X_1 X_2 \ldots X_k)$ rotierenden Raumes R_{n-k}. Dabei bilden R_k und $R_{n-k}^{(a)}$ miteinander gleiche Winkel α, R_{n-k} und $R_k^{(a)}$ miteinander gleiche Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

Durch Achsentransformation läßt sich die Gleichung des quadratischen Cylinderraums erster Stufe im allgemeinen auf die sich wieder auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem beziehende Form

$$p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \ldots + p_{n-1} x_{n-1}^2 = r^2$$

bringen, wobei OX_n dann die Richtung der Erzeugenden angibt. Und hierbei wiederholt sich nun die beim Kegelraume behandelte Menge von speziellen Fällen. So führt das Verschwinden einiger Koeffizienten p_i auf Cylinderräume höherer Stufe, die Gleichheit einiger Koeffizienten p_i auf Rotationscylinderräume; so findet man im R_7 die oben angewiesenen zehn Fälle wieder, usw.

Sind die $n - 1$ Größen p_k sämtlich einander gleich, so findet man einen Rotationscylinderraum mit einer Achse; bei der Projektion eines Kugelraumes K_n auf irgend einen

R_{n-1} seines Raumes liefert ein solcher Rotationscylinderraum die Projektionsgrenze. In der Form

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 = r^2$$

ist OX_n die Achse. Und in der Form

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_k^2 = r^2$$

gibt es einen Achsenraum $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_k = 0$.

Aufgabe 92. Beweise, daß die Konstantenzahl c' eines Rotationskegelraumes oder eines Rotationscylinderraumes mit einer Rotationsachse $2n + 1$ ist.

101. Kegel- und Cylinderraum in der darstellenden Geometrie. Wir beschränken uns hier auf R_4 und sogar hauptsächlich auf die Betrachtung des Kegelraumes mit einer Achse.

Sind (Fig. 88) die Achse (a_{12}, a_{23}, a_{34}), der Scheitel (S_{12}, S_{34}), der halbe Scheitelwinkel α und die Höhe h

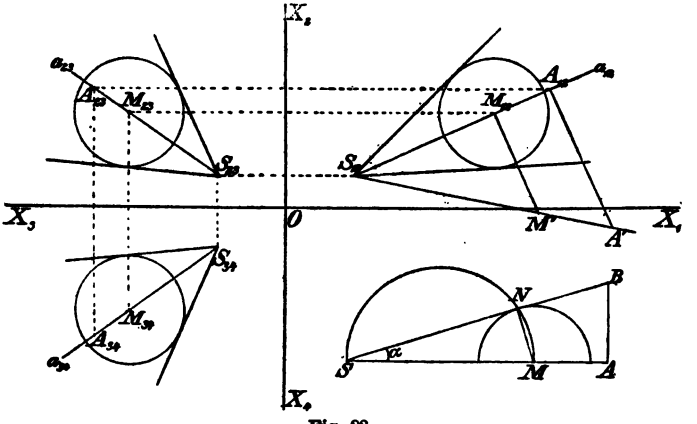


Fig. 88.

eines Rotationskegelraumes gegeben, so sind die Projektionsgrenzen dieses Polytopes leicht zu konstruieren. Zu diesem Zwecke betrachte man irgend einen von S verschiedenen Punkt M der Achse als Mittelpunkt eines eingeschriebenen, den Kegelraum in einer Kugel berührenden, Kugelraumes. Ist $M_{12}M' = M_{34}S_{34}$ zu $M_{12}S_{12}$ senkrecht, so ist $M'S_{12}$ die

wahre Länge des Achsensegmentes MS. Mit Hilfe des Dreiecks MNS, welches in N rechtwinklig ist, $MS = M'S_{12}$ zur Hypotenuse hat und in S den Winkel α besitzt, findet man den Radius MN dieses eingeschriebenen Kugelraums. Sind nun weiter $K_2(M_{12}, MN)$, $K_2(M_{23}, MN)$, $K_2(M_{34}MN)$ die Projektionen des Kugelraumes $K_4(M, MN)$, so bilden die der Reihe nach aus S_{12}, S_{23}, S_{34} an diese Kreise gelegten Tangentenpaare die Projektionsgrenzen des Kegelraummantels. Ist nun endlich SA die Höhe des Kegelraums und B der Schnittpunkt von SN mit dem in A auf SA errichteten Lote, so kann man $S_{12}A' = SA$ auf $S_{12}M'$ abtragen, aus A' den Punkt (A_{12}, A_{34}) der Achse ableiten, im Raume durch diesen Punkt senkrecht zur Achse sich die Kugel $K_3(A, AB)$ denken, und diese Kugel nach einer schon [90] entwickelten Methode auf die Ebenen $O(X_1X_2)$, $O(X_2X_3)$, $O(X_3X_4)$ projizieren. Die so erhaltenen elliptischen Projektionen, welche A_{12}, A_{23}, A_{34} zu Mittelpunkten, $A_{12}S_{12}$, $A_{23}S_{23}$, A_3S_{34} zu Richtungen der kleinen Achsen, und AB zur gemeinschaftlichen Länge der halben großen Achsen haben, werden dann die oben gefundenen geradlinigen Projektionsgrenzen des Kegelraummantels berühren und von den Berührungspunkten in zwei Bogen zerlegt werden, von welchen der größere sichtbar, der kleinere unsichtbar ist.

Gilt es nun auf dem in Rede stehenden Rotationskegelraume einen Punkt P anzunehmen, so bestimme man zunächst einen willkürlichen Punkt Q der Kugel $K_3(A, AB)$, um nachher auf der Erzeugenden SQ des Kegelraummantels den Punkt P willkürlich zu wählen. Denkt man sich die Projektion Q_{12} von Q gegeben, so bestimme man in der in Q_{12} zu $O(X_1X_2)$ senkrechten und also zu $O(X_3X_4)$ parallelen Ebene die Schnittlinie l mit dem Basisraume des Kegelraumes, und den Schnittkreis K_2 mit dem Kugelraume $K_4(A, AB)$; irgend einer der beiden Schnittpunkte von l und K_2 liefert dann Q_{34}. Und bestimmt man weiter mittels ähnlicher Dreiecke den Punkt R von SQ, welcher der Proportion

$$SB : SN = SQ : SR$$

Genüge leistet, so ist der in R zu RM senkrechte Raum der Berührungsraum des Kegelraummantels längs der Erzeugenden SQ, und also auch in P.

Die entsprechenden Konstruktionen für den vierdimensionalen Kegelraum mit zwei Achsenebenen werden sehr weitläufig, wenn diese zueinander senkrechten Ebenen in bezug auf die Koordinatenebenen eine willkürliche Lage haben; fallen sie mit den Koordinatenebenen $O(X_1 X_2)$ und $O(X_3 X_4)$ zusammen, so wird sich hingegen aus der Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_3^2 + x_4^2) \operatorname{tang}^2 \alpha$$

unmittelbar alles Konstruktionsmaterial ableiten lassen.

Obige Betrachtungen über den Kegelraum spezialisieren sich für den Cylinderraum dahin, daß der Scheitel S der uneigentliche Punkt der Achse wird; man denke sich dann die Achse (a_{12}, a_{23}, a_{34}), die Mittelpunkte der beiden Basiskugeln und die Radien dieser Kugeln gegeben. Wir überlassen es dem geneigten Leser dies durchzuführen.

102. Inhalt und Oberfläche von Cylinder- und Kegelräumen. Die verlangten Formeln sind unmittelbar aus den Inhaltsformeln (34, 39) von mehrfachen Prismen und Pyramiden abzulesen.

Für den Cylinderraum $Cy[(P\bar{o})_{n-p}, RV(p)]$ findet man:

„Ist I_{n-p} der Inhalt der Basis $(P\bar{o})_{n-p}$, I_p der Inhalt des Parallelotops $(Pa)_p$ mit zu $RV(p)$ equipollenten Kanten, und sind $u_1, u_2, \ldots, u_q$ die Winkel zwischen den Räumen R_{n-p} und R_p von $(P\bar{o})_{n-p}$ und $(Pa)_p$, — wo q die kleinere der Zahlen $n-p$, p ist —, so ist der Inhalt des Cylinderraumes gegeben durch die Formel:

$$I = I_{n-p} I_p \sin u_1 \sin u_2 \ldots \sin u_q .“$$

Für den Kegelraum $Ke[(P\bar{o})_{n-p}, S(p)]$ gilt ebenso:

„Ist I_{n-p} der Inhalt der Basis $(P\bar{o})_{n-p}$, I_{p-1} der Inhalt des Simplex $S(p)$ der Scheitel, l der Abstand der die Basis und die Scheitel tragenden Räume R_{n-p}, R_{p-1}, und sind $u_1, u_2, \ldots, u_q$ die Winkel zwischen diesen Räumen, — wo q die kleinere der Zahlen $n-p$, $p-1$ ist —, so ist der Inhalt des Kegelraumes gegeben durch die Formel:

$$I = \frac{1}{p(n)_p} I_{n-p} I_{p-1} l \sin u_1 \sin u_2 \ldots \sin u_q .“$$

Aufgabe 93. Bezeichnet man bei einem Kreissegmente mit $2r$, 2φ, 2ϱ und 2σ der Reihe nach den Durchmesser,

den Winkel, die Sehne und den Überschuß des Bogens über die Sehne, so erscheint der Inhalt des durch Rotation des halben Kreissegmentes um seine Symmetrieachse im R_4 erzeugten Kugelraumsegmentes als die Differenz zweier Rotationscylinderräume erster Potenz, für welche der Durchmesser der Basiskugel und die Höhe beim größeren ϱ und $2r$, beim kleineren r und 3σ sind. Man verlangt den Beweis.

Die Bestimmung der Oberfläche des Mantels eines Cylinderraumes ist scheinbar immer ein einfaches Problem. Man hat nämlich allgemein den Satz:

„Die Oberfläche des Mantels Mc des Cylinderraumes $Cy[(P\bar{o})_{n-p}, RV(p)]$ ist das Produkt des Inhalts I_p des Parallelotopes $(Pa)_p$ mit zu $RV(p)$ equipollenten Kanten in die Oberfläche O_{n-p} des Schnittes $(P\bar{o})'_{n-p}$ von Mc mit irgend einem Raume R_{n-p} senkrecht zum Raume R_p des $(Pa)_p$."

Es ist jedoch nicht immer leicht die Oberfläche O_{n-p} dieses „Normalschnittes" von Mc zu finden. So führt bekanntlich schon der einfache Fall des schiefen Kreiscylinders auf elliptische Integrale.

Die Bestimmung der Oberfläche des Mantels eines Kegelraumes ist nur dann ein einfaches Problem, wenn es sich um einen Kegelraum mit einer Rotationsachse handelt. Man findet nämlich:

„Die Oberfläche des Mantels Mk eines n-dimensionalen Kegelraumes mit einer Rotationsachse wird erhalten, indem man das Produkt der Basisoberfläche in das Apothema des Mantels durch $n-1$ dividiert."

Ist r der Radius des Basiskugelraumes, $O_{n-1}(r)$ in der Bezeichnungsweise der Nr. 95 seine Oberfläche und s das Apothema, so findet man also für die gesuchte Oberfläche $O(Mk)_n$

$$O(Mk)_{2m} = \frac{2^m \pi^{m-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-1)} r^{2m-2} s,$$

$$O(Mk)_{2m-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^{m-1}}{3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (m-1)} r^{2m-3} s,$$

oder allgemein

$$O(Mk)_n = \frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^{n-2} s .$$

103. Inhalt und Oberfläche von Cylinder- und Kegelraumstümpfen. Betrachtet man den Stumpf eines n-dimensionalen Cylinderraumes erster Stufe als die Summe einer unendlichen Anzahl unendlich dünner Prismenstümpfe mit gemeinschaftlichen Basis- und Deckräumen und gemeinschaftlicher Richtung der Mantelerzeugenden, so gilt für jeden dieser Summanden der dritte Satz der Nr. 40. Also gibt Summation:

„Der Inhalt eines Stumpfes eines Cylinderraums erster Stufe wird erhalten durch Multiplikation des Inhaltes des Basispolytopes in das aus dem Schwerpunkte des Deckpolytopes auf die Basis gefällte Lot, oder aber durch Multiplikation des Inhaltes des Normalschnittes in das von den Schwerpunkten der beiden Endpolytope begrenzte Geradensegment."

Hat das Basispolytop einen Mittelpunkt M und also auch das Deckpolytop einen Mittelpunkt M', so läuft MM' zu den Erzeugenden des Mantels parallel und sind M und M' die Schwerpunkte, welche im vorhergehenden Satze auftreten. In diesem speziellen Falle wird obiger Satz leicht ohne Schwerpunktsbetrachtungen bewiesen mittels der Bemerkung, daß ein n-dimensionaler Cylinderraum erster Stufe mit Mittelpunkten M und M' der Endpolytope in zwei kongruente Hälften zerlegt wird durch irgend einen den Mittelpunkt O des Geradensegmentes MM' enthaltenden Raum R_{n-1}.

Beim Stumpfe eines Kegelraumes erster Stufe beschränken wir uns wieder auf den einfachen Fall, wo die Räume der beiden Endpolytope einander parallel sind. Sind B und D die Inhalte von Basis- und Deckpolytop, ist h die Höhe und $KS_n(B, D, h)$ das Symbol des Kegelraumstumpfes des R_n, so findet man (vergleiche Nr. 41):

„Der Inhalt des Kegelraumstumpfes $KS_n(B, D, h)$ wird gefunden, indem man die Höhe h multipliziert mit dem

arithmetischen Mittel der n Glieder einer geometrischen Reihe, von welcher B und D die Endglieder sind."

In dem Falle des Rotationskegelraumstumpfes $KS_n(h, r_1, r_2)$ mit der Höhe h und den Radien r_1, r_2 der Endkugelräume findet man mit Hilfe von Nr. 95

$$I_{2m} = \frac{1}{m} \cdot \frac{2^{m-1}\pi^{m-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-1)} \cdot \frac{r_1^{2m} - r_2^{2m}}{r_1 - r_2} h,$$

$$I_{2m-1} = \frac{1}{2m-1} \cdot \frac{\pi^{m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)} \cdot \frac{r_1^{2m-1} - r_2^{2m-1}}{r_1 - r_2} h,$$

oder allgemein

$$I_n = \frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^{n-1}}{n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} h.$$

Die Oberfläche des Mantels eines Cylinderraumstumpfes erster Stufe kann nur dann scheinbar leicht angegeben werden, wenn das Basispolytop einen Mittelpunkt hat; mittels des oben angeführten Satzes der Zerlegung des Cylinderraumes erster Stufe in zwei kongruente Hälften findet man dann für die gesuchte Oberfläche das Produkt der Oberfläche des Normalschnittes in das Segment MM', welches den Abstand der Mittelpunkte M, M' der Endpolytope bildet. Wie schon früher [102] bemerkt wurde, ist es aber nicht immer leicht, die Oberfläche des Normalschnittes zu berechnen.

Die Oberfläche des Mantels des Rotationskegelraumstumpfes $KS_n(h, r_1, r_2)$ wird leicht gefunden, wenn man sie — gerade wie in der Stereometrie — als Differenz der Oberflächen der Mäntel zweier Rotationskegelräume betrachtet; ist $s = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$ das Apothema, so hat man

$$O_{2m} = \frac{2^m \pi^{m-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-1)} \cdot \frac{r_1^{2m-1} - r_2^{2m-1}}{r_1 - r_2} s,$$

$$O_{2m-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^{m-1}}{3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (m-1)} \cdot \frac{r_1^{2m-2} - r_2^{2m-2}}{r_1 - r_2} s,$$

oder allgemein

$$O_n = \frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{r_1^{n-1} - r_2^{n-1}}{r_1 - r_2} s .$$

104. Die Oberfläche des Kugelraumsegmentes und der Kugelraumschicht. Wir sind jetzt imstande, die in der Nr. 96 absichtlich unbesprochen gelassenen Oberflächen $O_n(r, h)$ und $O_n(r, h_1, h_2)$ von Segment und Schicht des Kugelraums K_n zu bestimmen.

Schneidet man (Fig. 89) die Schicht mit der Achse AB durch eine diese Achse enthaltende Ebene, so erhält man das Stück eines Kreises $K_2(M, r)$, welches zwischen zwei parallelen Sehnen C_1D_1, C_2D_2 liegt; es ist dann

$$AA_1 = h_1 , \quad AA_2 = h_2 .$$

Ist nun ds ein unendlich kleines Element des Bogens C_1C_2, dh seine Projektion auf die Achse und ϱ der Abstand des Mittelpunktes des Elementes von der Achse, so gilt — vergleiche die zwei ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke der Figur — die Proportion

$$\varrho : r = dh : ds ,$$

und man findet mit Hilfe der letzten Formeln der vorhergehenden Nummer, wenn man bedenkt, daß $\frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1 - r_2}$ bei Anwendung auf die von ds beschriebene Schicht in $p\varrho^{p-1}$ übergeht, unmittelbar

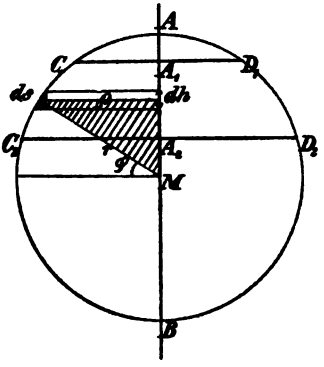


Fig. 89.

$$O_{2m}(r, h_1, h_2) = \frac{2^m \pi^{m-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-3)} \int_{\text{arc } AC_1}^{\text{arc } AC_2} \varrho^{2m-2} ds$$

$$= \frac{2^m \pi^{m-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-3)} r \int_{AA_1}^{AA_2} \varrho^{2m-3} dh ,$$

$$O_{2m-1}(r,\ h_1,\ h_2) = \frac{\pi^{m-1}}{3\cdot 4\cdot 5\ \ldots\ (m-2)}\int_{\text{arc}\,AC_1}^{\text{arc}\,AC_2}\varrho^{2m-3}\,ds$$

$$= \frac{\pi^{m-1}}{3\cdot 4\cdot 5\ \ldots\ (m-2)}\,r\int_{AA_1}^{AA_2}\varrho^{2m-4}\,dh\,.$$

Mittels der Substitution $\varrho = r\cos\varphi$ erhält man also

$$O_{2m}(r,\ h_1,\ h_2) = \frac{2^m\pi^{m-1}}{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2m-3)}\,r^{2m-1}\int_{\arccos\left(1-\frac{h_1}{r}\right)}^{\arccos\left(1-\frac{h_2}{r}\right)}\sin\varphi^{2m-2}\,d\varphi\,,$$

$$O_{2m-1}(r,\ h_1,\ h_2) = \frac{\pi^{m-1}}{3\cdot 4\cdot 5\ \ldots\ (m-2)}\,r^{2m-2}\int_{\arccos\left(1-\frac{h_1}{r}\right)}^{\arccos\left(1-\frac{h_2}{r}\right)}\sin\varphi^{2m-3}\,d\varphi$$

und also allgemein

$$O_n(r,\ h_1,\ h_2) = (n-1)\,\frac{[\Gamma(\tfrac{1}{2})]^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,r^{n-1}\int_{\arccos\left(1-\frac{h_1}{r}\right)}^{\arccos\left(1-\frac{h_2}{r}\right)}\sin\varphi^{n-2}\,d\varphi\,.$$

Aufgabe 94. Betrachte die Fälle $n = 4$ und $n = 5$ etwas näher.

---

§ 11. Allgemeinere Rotationsräume.

105. Plani- und stereometrische Einleitung. In der Ebene kann nur von Rotation um einen Mittelpunkt M die Rede sein. Es beschreibt dann der Punkt P den Kreis $K_2(M, MP)$ und es hüllt die Gerade g den vom Fußpunkte M' des aus M auf g gefällten Lotes beschriebenen Kreis $K_2(M, MM')$ ein.

Im Raume kann eine Rotation um einen Mittelpunkt M herum oder um eine Achse stattfinden; die zweite Rotation

hat nur einen Freiheitsgrad, die erste zwei. Dreht sich ein Punkt P um M, so wird die Kugel $K_3(M, MP)$ erzeugt; dreht sich eine Gerade g oder eine Ebene ε um M, so wird die Kugel $K_3(M, MM')$ eingehüllt, welche von der Projektion M' von M auf g oder ε erzeugt wird.

Bei der Rotation eines Punktes P um eine Achse a wird ein Kreis erzeugt. Bei der Rotation einer Geraden g um a entsteht im allgemeinen ein einschaliges Rotationshyperboloid, welche Fläche unter Umständen in einen geraden Kreiscylinder, einen geraden Kegel oder eine Ebene ausarten kann. Bei der Rotation einer Ebene ε um a wird im allgemeinen der gerade Kegel eingehüllt, welcher von der Projektion a' von a auf ε erzeugt wird; dabei treten dann die speziellen Fälle einer zu a parallelen, durch a hindurchgehenden, oder zu a senkrechten Ebene ε auf.

Weiter kann man im Raume entweder eine in einer durch die Achse a gehenden Ebene liegende Kurve oder eine Raumkurve um a rotieren lassen, wobei dann die Achse a zur Achse OX_1 des benutzten rechtwinkligen Koordinatensystems $O(X_1X_2X_3)$ gewählt sein mag. Ist im ersten Falle $f(x_1, x_2) = 0$ in der Ebene $O(X_1X_2)$ die Gleichung der „Meridiankurve", so ist $f(x_1, \sqrt{x_2^2 + x_3^2}) = 0$ die Gleichung der Rotationsfläche; sind im zweiten Falle $x_2 = \varphi(x_1)$, $x_3 = \psi(x_1)$ die Gleichungen der Projektionen der Raumkurve auf die Ebenen $O(X_1X_2)$, $O(X_1X_3)$, so stellt $x_2^2 + x_3^2 = [\varphi(x_1)]^2 + [\psi(x_1)]^2$ die gesuchte Rotationsfläche analytisch dar.

Von den Rotationsflächen, welche nicht durch Drehung einer Geraden entstehen können, ist die Ringfläche wohl am bekanntesten; wir werden den mehrdimensionalen Verallgemeinerungen dieser Fläche eine Nummer widmen.

106. Die von linearen Räumen erzeugten Rotationsgebilde im R_n. Im R_n sind zwei Räume, ein Achsenraum R_a von a und ein bewegender Raum R_b von b Dimensionen gegeben; was entsteht bei der Rotation von R_b um R_a?

Bei der Rotation um R_a beschreibt irgend ein Punkt P von R_n, welcher sich in P' auf R_a projiziert, im Raume R_{n-a} durch PP' senkrecht zu R_a einen Kugelraum $K_{n-a}(P', P'P)$. Und betrachtet man in diesem Raume R_{n-a} irgend einen durch P gehenden und zu PP' senk-

rechten Raum R_q, so ergibt sich unmittelbar, daß dieser R_q bei der Rotation um R_a in jeder seiner Lagen den Kugelraum $K_{n-a}(P', P'P)$ in der entsprechenden Lage von P berührt und also diesen Kugelraum einhüllt.

Diese Bemerkungen führen uns zu den beiden folgenden allgemeinen Sätzen:

α) „Bei der Rotation wird ein Gebilde entweder eingehüllt oder erzeugt, je nachdem die Projektion von R_a auf R_b den ganzen Raum R_b ausfüllt oder nur einen im R_b enthaltenen Raum R_c niedrigerer Dimensionenzahl c. Im letzteren Falle wird bei der Rotation von R_b das nämliche Gebilde eingehüllt, welches bei der Rotation von R_c erzeugt wird. Deshalb bringt Ersetzung von R_b durch die Projektion R_c von R_a auf R_b jeden Fall der Einhüllung zum entsprechenden Falle der Erzeugung zurück."

β) „Bei der Rotation entsteht ein Gebilde, dessen linearer Träger nur der R_n ist oder ein Raum niedrigerer Dimensionenzahl sein kann, je nachdem umgekehrt die Projektion von R_b auf R_a den ganzen Raum R_a ausfüllt oder nur einen im R_a enthaltenen Raum R'_c. Im letzteren Falle wird das erzeugte Gebilde in dem Raume R_{n-a+c} liegen, welcher dem Raume R'_c entlang im R_n auf R_a senkrecht steht. Mittels dieses Satzes ist man imstande, immer anzugeben, in welchem Raume niedrigster Dimensionenzahl das erzeugte Rotationsgebilde enthalten ist."

Die obigen Sätze bringen das Problem der Rotation des Raumes R_b um den Raum R_a zum einfacheren Falle zurück, wo ein Raum R_c um einen Raum R'_c der nämlichen Dimensionenzahl rotieren soll und diese Räume in bezug aufeinander keine Orthogonalitätsverhältnisse aufweisen. Nach theoretischer Ausscheidung dieser Orthogonalitätsverhältnisse können jetzt die verschiedenen Parallelitäts- und Schnittverhältnisse um so leichter erörtert werden.

Wir beweisen nun sogleich folgenden allgemeinen Satz:

„Bei der Rotation eines Raumes R_p um einen zu ihm windschiefen Raum R'_p des R_n entsteht ein quadratisches Rotationsgebilde $Q_n^{(2)}$ von der Potenz (100) $n-p-1$. Haben R_p und R'_p keinen eigentlichen Punkt, sondern einen uneigentlichen Raum U_q gemein, so ist $Q_n^{(2)}$ ein Cylinderraum

$(q+1)$-ter Stufe, dessen Normalschnitt ein Rotationsgebilde $Q^{(2)}_{n-q-1}$ von der Potenz $n-p-1$ ist und in irgend einem Raume R_{n-q-1} senkrecht zu allen Räumen R_{q+1} durch U_q liegt. Und durchdringen R_p und R'_p einander in einem Raume R_q, so ist $Q^{(2)}_n$ im allgemeinen ein Cylinderraum q-ter Stufe, dessenNormalschnitt ein Rotationskegel $Ke^{(2)}_{n-q}$ von der Potenz $n-q-1$ ist und in irgend einem Raume R_{n-q} senkrecht zu R_q liegt."

Der Beweis dieses Satzes wird am leichtesten analytisch geführt. Ist im Achsenraum R'_p ein rechtwinkliges Achsensystem $O(X_1 X_2 \ldots X_p)$ angenommen und dies durch ein rechtwinkliges Achsensystem $O(X_{p+1} X_{p+2} \ldots X_n)$ im Raume R'_{n-p} durch O senkrecht zu R'_p zu einem rechtwinkligen Achsensystem $O(X_1 X_2 \ldots X_n)$ im R_n ergänzt, so wird das Gleichungssystem des bewegten Raumes R_p die Form

$$(82) \qquad x_{p+i} = a_{1,i} x_1 + a_{2,i} x_2 + \ldots + a_{p,i} x_p + a_{p+1,i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-p)$$

annehmen können, und dann ist

$$(83) \qquad \sum_{i=1}^{i=n-p} x^2_{p+i} = \sum_{i=1}^{i=n-p} (a_{1,i} x_1 + a_{2,i} x_2 + \ldots + a_{p,i} x_p + a_{p+1,i})^2$$

die Gleichung des Rotationsgebildes. Denn jeder Raum R_{n-p} mit den Gleichungen $x_i = x'_i$, $(i = 1, 2, \ldots, p)$, hat mit dem durch diese Gleichung dargestellten $Q^{(2)}_n$ den Kugelraum

$$\sum_{i=1}^{i=n-p} x^2_{p+i} = \sum_{i=1}^{i=n-p} (a_{1,i} x'_1 + a_{2,i} x'_2 + \ldots + a_{p,i} x'_p + a_{p+1,i})^2$$

gemein, welcher vom Punkte $x = x'_i$, $(i = 1, 2, \ldots, p)$, des bewegten Raumes R_p beschrieben wird. Und hieraus ergeben sich die drei im Satze erwähnten Resultate, je nachdem man voraussetzt

1. die $a_{k,i}$ sind sämtlich von null verschieden und voneinander unabhängig,
2. es verschwinden die Koeffizienten $a_{p-q,i}, a_{p-q+1,i}, \ldots, a_{p,i}$,
3. es verschwinden außerdem die bekannten Glieder $a_{p+1,i}$.

Aufgabe 95. Im R_n sind zwei Räume R_a, R_b gegeben, welche keinen eigentlichen Punkt gemein haben. Was

entsteht bei Rotation von R_b um R_a, wenn $a < b$ ist und die Brüche $\frac{c}{a}$, $\frac{d}{a}$ die Grade von Parallelität und Orthogonalität von R_a und R_b angeben?

Wir betrachten jetzt noch den ganz speziellen Fall, wo die Koeffizienten $a_{p+1,i}$, $(i = 1, 2, \ldots, n-p)$, des Gleichungssystems (82) sämtlich verschwinden und die Matrix der übrigen Koeffizienten mit $n-p$ Zeilen und p Kolonnen die Eigenschaft besitzt, daß die Summe der Quadrate der Elemente irgend einer Kolonne den konstanten Wert c^2 liefert, während die Summe der Produkte der entsprechenden Elemente irgend zweier Kolonnen verschwindet. Es nimmt die Gleichung (83) des Rotationsgebildes dann die Form

$$\sum_{i=1}^{i=n-p} x_{p+i}^2 = c^2 \sum_{i=1}^{i=p} x_i^2 \tag{84}$$

an, d. h. dieses Gebilde ist ein Kegelraum mit zwei Achsenräumen, den Koordinatenräumen $O(X_1 X_2 \ldots X_p)$ und $O(X_{p+1} X_{p+2} \ldots X_n)$.

[In Verbindung mit den Entwicklungen der Nr. 90 über die von zwei Räumen R_p und R'_p gebildeten Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ findet man allgemein, wenn die Gleichung nach Reduktion der rechten Seite auf die Achsen in die Form

$$\sum_{i=1}^{n-p} x_{p+i}^2 = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_p x_p^2$$

übergeht, die Beziehungen

$$\operatorname{tang}^2 \alpha_1 = \lambda_1, \quad \operatorname{tang}^2 \alpha_2 = \lambda_2, \quad \ldots, \quad \operatorname{tang}^2 \alpha_p = \lambda_p .$$

Deshalb sind im angeführten speziellen Falle die p Winkel α einander gleich.]

107. Die Torusgruppe. Wir denken uns jetzt folgendes Problem gestellt:

„Im R_n ist ein Raum R_p als Achsenraum und in irgend einem Raume R_{p+1} durch R_p ein Kugelraum $K_{p+1}(M, r)$ gegeben. Man verlangt das „Torusgebilde“ zu untersuchen, welches bei Rotation von $K_{p+1}(M, r)$ um R_p entsteht.“

Wir lösen dieses Problem analytisch und bedienen uns zu diesem Zwecke eines rechtwinkligen Koordinatensystems

$O(X_1 X_2 \ldots X_n)$, dessen Anfangspunkt die Projektion O des Kugelraummittelpunktes M auf den Achsenraum R_p ist und dessen Achsen OX_1, OX_2, ..., OX_p in diesem R_p liegen, während OX_{p+1} sich im R_{p+1} befindet. Es wird dann der Kugelraum $K_{p+1}(M, r)$ dargestellt durch das Gleichungssystem

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 + (x_p - a)^2 = r^2,$$
$$x_{p+1} = 0, \quad x_{p+2} = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0,$$

wenn a die Länge von MO angibt. Also ist

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 + (\sqrt{x_{p+1}^2 + x_{p+2}^2 + \ldots + x_n^2} - a)^2 = r^2$$

die Gleichung des Torusgebildes. Und diese Gleichung nimmt nach Entfernung des Wurzelzeichens die Form

$$\left[\sum_1^n x_i^2 + a^2 - r^2\right]^2 = 4a^2(x_{p+1}^2 + x_{p+2}^2 + \ldots + x_n^2)$$

an. Deshalb ist das Resultat ein Rotationsgebilde $T^{(4)}_{n,n-p-1}$ vierter Ordnung und $(n-p-1)$-ter Potenz, welches den gemeinschaftlichen uneigentlichen imaginären $(n-1)$-dimensionalen Kugelraum aller Kugelräume K_n zweimal enthält.

Aufgabe 96. Zeige, daß die Projektionsgrenze von $T^{(4)}_{n,n-p-1}$ auf irgend einen Raum R_{n-1} „der gebogene Parallelraum“ eines quadratischen Raumes $Q_n^{(2)}$ ist.

108. Die Guldinschen Regeln. Wir denken uns weiter im R_n wieder einen Achsenraum R_p und in irgend einem Raume R_{p+1} durch R_p ein Polytop $(P\bar{o})_{p+1}$ gegeben. Es entsteht dann durch Rotation von $(P\bar{o})_{p+1}$ um R_p ein Rotationsgebilde $(n-p-1)$-ter Potenz $(P\bar{o})_{n,n-p-1}$, dessen Inhalt und Oberfläche wir bestimmen wollen.

Inhaltsbestimmung. Jeder Punkt des rotierenden Polytopes $(P\bar{o})_{p+1}$ beschreibt die Oberfläche eines Kugelraumes K_{n-p}, welcher die Entfernung x des Punktes zum Rotationsraume R_p zum Radius hat. Bezeichnet $b_{n-p}x^{n-p-1}$ die Oberfläche [95] dieses Kugelraumes und dv das $(p+1)$-dimensionale Volumelement des $(P\bar{o})_{p+1}$, so ist die gesuchte Inhaltsformel durch

$$I_{n,n-p-1} = b_{n-p}\int x^{n-p-1}\,dv$$

dargestellt, wo das Integral sich über alle Inhaltselemente dv des $(P\bar{o})_{p+1}$ erstreckt. Ist nun I_{p+1} das Volumen des $(P\bar{o})_{p+1}$, so kann man sich ein Geradensegment $\bar{x}$ denken, welches der Gleichung

$$\int x^{n-p-1}\,dv = \bar{x}^{n-p-1}\int dv = \bar{x}^{n-p-1}\,I_{p+1}$$

Genüge leistet. Durch Einführung dieser Größe $\bar{x}$ findet man sodann

$$I_{n,n-p-1} = I_{p+1}\cdot b_{n-p}\bar{x}^{n-p-1};$$

nennt man $\bar{x}$ den „Trägheitsradius $(n-p-1)$-ter Potenz" des Inhaltes I_{p+1} des $(P\bar{o})_{p+1}$ in bezug auf den R_p seines Raumes R_{p+1}, so gilt der Satz:

„Man erhält den Inhalt $I_{n,n-p-1}$ des Rotationsgebildes $(n-p-1)$-ter Potenz, welches durch Rotation des Polytopes $(P\bar{o})_{p+1}$ um einen dieses Polytop nicht schneidenden Achsenraum R_p seines Raumes R_{p+1} im R_n erzeugt wird, indem man den Inhalt I_{p+1} des $(P\bar{o})_{p+1}$ multipliziert in die Oberfläche des Kugelraumes K_{n-p}, welcher den Trägheitsradius $(n-p-1)$-ter Potenz von I_{p+1} in bezug auf R_p zum Radius hat."

Im speziellen Falle des Torusgebildes $T_{n,n-p-1}$ findet man deshalb das Produkt des Inhaltes eines Kugelraumes K_{p+1} in die Oberfläche eines Kugelraumes K_{n-p}.

Aufgabe 97. Betrachte die beiden in R_4 auftretenden Glieder der Torusgruppe.

[Man findet für $T^{(4)}_{4,1}(r, a)$, wo $\bar{x}$ sich auf den Schwerpunkt des Inhaltes der rotierenden Kugel bezieht, $I_{4,1}(r, a) = \frac{8}{3}\pi^2 r^3 a$, und für $T^{(4)}_{4,2}(r, a)$, wo $\bar{x}$ gewöhnlicher Trägheitsradius des rotierenden Kreises ist,

$$I_{4,2}(r, a) = \pi^2 r^2 (r^2 + 4a^2)\,.]$$

Aufgabe 98. Leite aus obigen Betrachtungen den Inhalt des Kugelraumes K_4 mit dem Radius r abermals ab.

[Durch die Rotation einer Halbkugel um eine auf der Seite der begrenzenden Diametralebene liegende zu dieser Ebene parallele Ebene ihres Raumes findet man

$$I_{4,1}(r, a) = \tfrac{2}{3}\pi r^3 \cdot 2\pi(\tfrac{3}{8}r + a) = \tfrac{1}{6}\pi^2 r^3 (3r + 8a);$$

ebenso gibt die Rotation eines Halbkreises um eine auf der

Seite des begrenzenden Durchmessers liegende zu dieser Gerade parallele Gerade seiner Ebene

$$I_{4,2}(r, a) = \tfrac{1}{2}\pi r^2 \cdot 4\pi\left[\tfrac{1}{4}r^2 - \left(\frac{3r}{8}\right)^2 + \left(a + \frac{3r}{8}\right)^2\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi^2 r^2 (r^2 + 3ar + 4a^2),$$

welche Resultate für $a = 0$ in $\frac{1}{2}\pi^2 r^4$ übergehen.]

Oberflächenbestimmung. Ersetzt man die $(p+1)$-dimensionalen Volumelemente dv des $(P\bar{o})_{p+1}$ in obigen Betrachtungen durch die p-dimensionalen Oberflächenelemente dw dieses Polytopes, so ergibt sich unmittelbar folgender allgemeiner Satz:

„Man erhält die Oberfläche $O_{n,n-p-1}$ des Rotationsgebildes $(n-p-1)$-ter Potenz, welches durch Rotation des Polytopes $(P\bar{o})_{p+1}$ um einen dieses Polytop nicht schneidenden Achsenraum R_p seines Raumes R_{p+1} im R_n erzeugt wird, indem man die Oberfläche O_{p+1} des $(P\bar{o})_{p+1}$ multipliziert in die Oberfläche des Kugelraumes K_{n-p}, welcher den Trägheitsradius $(n-p-1)$-ter Potenz von O_{p+1} in bezug auf R_p zum Radius hat."

Im speziellen Falle des Torusgebildes $T_{n,n-p-1}$ findet man deshalb das Produkt der Oberflächen zweier Kugelräume, eines K_{p+1} und eines K_{n-p}.

Aufgabe 99. Betrachte die beiden im R_4 auftretenden Glieder der Torusgruppe und leite aus diesen Betrachtungen die Oberfläche des Kugelraumes K_4 mit dem Radius r abermals ab.

[Man findet $O_{4,1}(r,a) = 8\pi^2 r^2 a$, $O_{4,2}(r,a) = 4\pi^2 r(r^2 + 2a^2)$.

Bei der Rotation einer Halbkugel und eines Halbkreises erhält man unter den in der vorhergehenden Aufgabe angedeuteten Umständen

$$O_{4,1}(r, a) = 2\pi r^2 \cdot 2\pi(\tfrac{1}{2}r + a) = 2\pi^2 r^2 (r + 2a)$$

und

$$O_{4,2}(r, a) = \pi r \cdot 4\pi\left[\tfrac{1}{2}r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(a + \frac{r}{2}\right)^2\right]$$
$$= 2\pi^2 r (r^2 + 2ar + 2a^2),$$

welche beide Resultate für $a = 0$ in $2\pi^2 r^3$ übergehen.]

Die beiden Sätze dieser Nummer bilden die mehrdimensionalen Verallgemeinerungen der Guldinschen Regeln zur Bestimmung von Inhalt und Oberfläche von Rotationskörpern. Sie können, wenn Inhalt und Oberfläche der Rotationsgebilde schon bekannt sind, umgekehrt zur Bestimmung von Trägheitsradien verwendet werden.

109. Gemischte Rotationsgebilde. In der Stereometrie betrachtet man gewöhnlich auch Rotationskörper gemischter Begrenzung und, seiner einfachen Inhaltsformel wegen mit gewisser Vorliebe, den Körper, welcher mittels Rotation eines Kreissegmentes um irgend einen dasselbe nicht schneidenden Durchmesser erzeugt werden kann. Wir leiten in den folgenden Zeilen die ebenfalls einfachen Inhalts- und Oberflächenformeln des Rotationsgebildes $S(r, \varrho, \alpha)_{n,1}$ erster Potenz ab, welches entsteht, wenn ein Segment $S(r, \varrho)$ eines Kugelraumes K_{n-1} mit r und ϱ als Radien von Kugelraum- und Basisbegrenzung um irgend einen mit dem Raume R_{n-2} seiner Basis einen Winkel α bildenden Diametralraum $R^{(\alpha)}_{n-2}$ seines Raumes rotiert, welcher keinen Punkt mit dieser Basisbegrenzung gemein hat. Es gelten nämlich die Sätze:

„Man findet den Inhalt des Rotationssegmentes erster Potenz $S(r, \varrho, \alpha)_{n,1}$, indem man den Inhalt des Kugelraumes $K_n(r)$ mit $\cos\alpha$ multipliziert."

„Man findet die Oberfläche desjenigen Teils der Begrenzung des erwähnten Rotationssegmentes, welcher von der Rotation der Kugelraumbegrenzung des Segmentes herrührt, indem man den Inhalt der Projektion der Basis des Segmentes auf den Achsenraum mit $2\pi r$ multipliziert."

Mittels Anwendung der Guldinschen Regeln ergibt sich unmittelbar, daß die Sätze für den allgemeinen Fall eines willkürlichen α bewiesen sind, sobald ihre Wahrheit für den speziellen Fall $\alpha = 0$ feststeht.

Der Beweis der beiden Sätze für $\alpha = 0$ wird mit Hilfe der Resultate der Nr. 95 und 103 leicht geführt. Ist x der Abstand eines Querschnittes des Segmentes mit einem Raume $R^{(x)}_{n-2}$ parallel zum Achsenraume $R^{(\alpha)}_{n-2}$, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ der Radius des diesen Querschnitt bildenden Kugelraumes $K^{(x)}_{n-2}$, und ds das Apothema des unendlich kleinen $(n-1)$-dimensionalen

Kegelraumstumpfes zwischen den Räumen $R_{n-2}^{(x)}$ und $R_{n-2}^{(x+dx)}$, so ist

$$I = 2\pi a_{n-2}\int_{x=\sqrt{r^2-\varrho^2}}^{x=r} y^{n-2}\,x\,dx\,, \quad O = 2\pi b_{n-2}\int_{x=\sqrt{r^2-\varrho^2}}^{x=r} y^{n-3}\,x\,ds\,,$$

was sich mittels der Beziehungen $x\,dx + y\,dy = 0$ und $y\,ds = r\,dx$ in

$$I = 2\pi a_{n-2}\int_0^{\varrho} y^{n-1}\,dy\,, \quad O = 2\pi r\,b_{n-2}\int_0^{\varrho} y^{n-3}\,dy$$

umbildet, und sodann übergeht in

$$I = \frac{2\pi}{n}a_{n-2}\varrho^n = a_n\varrho^n,\ O = 2\pi r\frac{b_{n-2}}{n-2}\varrho^{n-2} = 2\pi r\cdot a_{n-2}\varrho^{n-2}.$$

Das allgemeinere Rotationsgebilde $S(r,\ \varrho,\ \alpha)_{n,k}$ k-ter Potenz führt nicht zu solchen einfachen Inhalts- und Oberflächenformeln. Ganz in der nämlichen Weise findet man

$$\left.\begin{aligned} I_{n,k} &= a_{n-k-1}\,b_{k+1}\cos^k\alpha\int_{x=\sqrt{r^2-\varrho^2}}^{x=r} y^{n-k-1}\,x^k\,dx \\ O_{n,k} &= r\,b_{n-k-1}\,b_{k+1}\cos^k\alpha\int_{x=\sqrt{r^2-\varrho^2}}^{x=r} y^{n-k-3}\,x^k\,dx \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

und hieraus läßt sich mittels der Beziehungen zwischen den Größen a und b die allgemeine Gleichung

$$O_{n,k} = 2\pi r\,I_{n-2,k}$$

ableiten.

Aufgabe 100. Leite die für das Torusgebilde $T(r, a)_{n,k}$ geltenden Formeln

$$I(r, a)_{n,k} = a_{n-k-1}\,b_{k+1}\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}^{\,n-k-1}(a+x)^k\,dx\,,$$

$$O(r, a)_{n,k} = r\,b_{n-k-1}\,b_{k+1}\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}^{\,n-k-3}(a+x)^k\,dx$$

ab und gib an, zu welcher allgemeinen Beziehung sie Anlaß geben.

110. Die nicht-linearen einander berührenden Systeme von Kugelräumen. In dieser Schlußnummer zeigen wir, daß wir jetzt imstande sind das System der Kugelräume K_n zu untersuchen, welche n willkürlich im R_n gegebene Kugelräume K_n berühren. Wir folgen dabei der Reyeschen Behandlungsweise und führen zunächst den allgemeinen Fall auf einen einfacheren zurück, wo die Mittelpunkte der n gegebenen Kugelräume K_n in einem R_{n-2} liegen.

Die Mittelpunkte der n gegebenen Kugelräume K_n bestimmen einen Raum R_{n-1}, welcher diese Kugelräume K_n in Großkugelräumen schneidet; sei O der Potenzpunkt dieser n Kugelräume K_{n-1} und r^2 die zunächst positiv vorausgesetzte Potenz dieses Punktes in bezug auf die K_{n-1}. Dann ist $K_{n-1}(O, r)$ im R_{n-1} der Mittelpunkte der Orthogonalkugelraum der n Kugelräume K_{n-1} und also ein Orthogonalkugelraum der n gegebenen K_n. Wenden wir nun auf die Figur eine Transformation durch reziproke Radien an, welche irgend einen Punkt O' des Orthogonalkugelraumes $K_{n-1}(O, r)$ zum Mittelpunkte hat, so gehen die n gegebenen Kugelräume K_n und der sie senkrecht schneidende Kugelraum $K_{n-1}(O, r)$ durch O' in n neue Kugelräume K'_n und einen diese Kugelräume K'_n senkrecht schneidenden Raum R_{n-2} über; dieser spezielle Fall, wo die n Mittelpunkte in einem R_{n-2} liegen, soll zunächst studiert werden.

Ist $K_n^{(p)}$ irgend ein Kugelraum, welcher die n neuen Kugelräume K'_n sämtlich berührt, so wird dieser $K_n^{(p)}$ bei Rotation um den Raum R_{n-2} durch die Mittelpunkte in jeder Lage die n neuen Kugelräume berühren und deshalb eine einfach unendliche Reihe berührender Kugelräume bilden. In irgend einem R_{n-1} durch den Achsenraum R_{n-2} gibt es nun 2^{n-1} Paare [93] von in bezug auf R_{n-2} symmetrisch liegenden Kugelräumen K_{n-1}, welche die in diesem R_{n-1} enthaltenen Großkugelräume K'_{n-1} der n Kugelräume K'_n berühren. Da jedes dieser Paare $[K_{n-1}^{(\text{links})}, K_{n-1}^{(\text{rechts})}]$ bei Rotation zu einer unendlichen Reihe führt, gibt es 2^{n-1} solcher Reihen. Die Kugelräume irgend einer dieser Reihen werden von einem Torusgebilde $T^4_{n,1}$ eingehüllt, und ihre Mittelpunkte liegen auf einem Kreise. Beschränkt man sich auf die Reihe, welche von einem bestimmten Paare $[K_{n-1}^{(l)}, K_{n-1}^{(r)}]$ erzeugt wird, so kann man das System der n berührten Kugelräume K'_n ausdehnen zu einer $(n-2)$-fach unendlichen

Reihe berührter Kugelräume K_n, indem man sich alle Kugelräume K_n' denkt, welche aus den Punkten von R_{n-2} so beschrieben werden, daß sie $K_{n-1}^{(i)}$ und deshalb auch $K_{n-1}^{(r)}$ berühren.

Wie transformieren sich nun rückwärts mittels reziproker Radien aus dem Punkte O' von willkürlicher Lage die gefundenen nicht-linearen Systeme von Kugelräumen K_n, das einfach unendliche System S_1 der Kugelräume gleicher Größe mit dem Kreise $K_2(M_0, r_0)$ als Ort der Mittelpunkte, und das $(n-2)$-fach unendliche System S_{n-2} mit dem in M_0 auf der Ebene ε des Kreises $K_2(M_0, r_0)$ senkrecht stehenden Raume R_{n-2} als Ort der Mittelpunkte, welche die Eigenschaft besitzen, daß sämtliche Kugelräume des einen Systems sämtliche Kugelräume des andern berühren? Die Beantwortung dieser Frage wird wesentlich erleichtert durch die Bemerkung, daß die aus den beiden Systemen S_1, S_{n-2} und ihren Umbildungen S_1', S_{n-2}' bestehende n-dimensionale Figur eine Symmetrieebene zuläßt, die Ebene σ durch M_0, O' und die Projektion O'' von O' auf R_{n-2}. Diese Ebene σ,

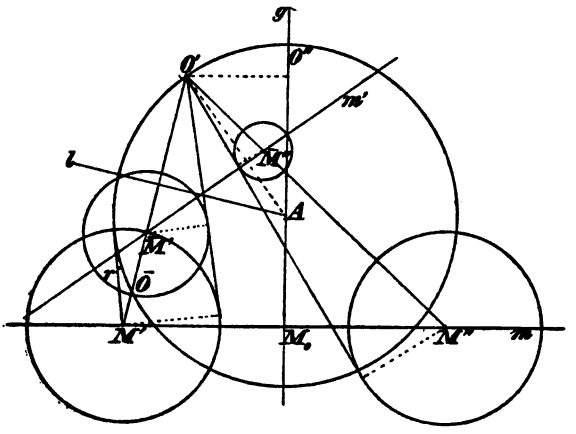


Fig. 90.

welche als Bildebene der Fig. 90 angenommen wurde, hat mit ε den zu $O'O''$ parallelen Durchmesser m des Kreises $K_2(M_0, r_0)$ gemein und steht in dieser Gerade m auf ε halbsenkrecht; also ist sie Symmetrieebene für das System S_1.

Sie hat weiter mit R_{n-2} die Gerade $M_0 O''$ gemein und steht in dieser Gerade g halbsenkrecht auf R_{n-2}; deshalb ist sie auch Symmetrieebene für das System S_{n-2}, indem die Mittelpunkte der Kugelräume gleicher Größe dieses Systems im R_{n-2} die Oberflächen von Kugelräumen K_{n-2} mit dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte M_0 erfüllen. Und wenn diese Ebene σ Symmetrieebene ist für S_1, S_{n-2}, so ist sie es auch für S_1', S_{n-2}', indem sie den Transformationsmittelpunkt O' enthält.

Wir beweisen nun zunächst, daß die Mittelpunkte der Kugelräume von S_1' in einem Kegelschnitte liegen. Zu diesem Zwecke mögen in der Symmetrieebene σ (Fig. 90) die Punkte M', M'' die Schnittpunkte mit dem Kreise $K_2(M_0, r_0)$, der Kreis $K_2(M', r')$ den Querschnitt mit dem Kugelraume $K_n(M', r')$ von S_1, und $\overline{O}$ den Punkt der Gerade $M'O'$ darstellen, welcher der Bedingung $M'\overline{O} \cdot M'O' = r'^2$ Genüge leistet. Dann ist der Schnittpunkt A von g mit dem Mittellote l des Segmentes $\overline{O}O'$ der Mittelpunkt einer Kugel $K_3(A, O'A)$, welche alle Kugelräume K_n von S_1 senkrecht schneidet. Diese Kugel geht durch Transformation aus O' in eine auf $O'A$ senkrecht stehende Ebene ε' über, welche σ in einer zu $O'A$ senkrechten Geraden m' schneidet; diese Ebene ε' enthält die Mittelpunkte der Kugelräume K_n von S_1', indem sie diese Kugelräume sämtlich senkrecht schneidet. Nun bleibt aber bei der Transformation aus O' der Mittelpunkt eines Kugelraumes auf der ihn mit O' verbindenden Gerade; deshalb enthält der Kegel, welcher den Kreis $K_2(M_0, r_0)$ aus O' projiziert, die Mittelpunkte der Kugelräume von S_1', und ist der Querschnitt dieses Kegelmantels mit der Ebene ε' der Ort dieser Mittelpunkte. Von diesem Kegelschnitte ist m' eine Symmetrieachse, und sind die Punkte $\overline{M}'$ und $\overline{M}''$, welche die Mittelpunkte der transformierten Kugelräume werden, Scheitel. Wobei noch bemerkt werden muß, daß dieser Kegelschnitt eine Ellipse E, eine Parabel P oder eine Hyperbel H sein wird, je nachdem keiner, einer oder zwei der Kugelräume K_n von S_1 durch O' hindurchgehen, d. h. je nachdem O' außerhalb der beiden Kreise $K_2(M', r')$, $K_2(M'', r')$, auf einem dieser Kreise oder innerhalb eines dieser Kreise liegt. Von diesen drei Fällen möge der durch die Fig. 90 veranschaulichte Fall weiter ausschließlich betrachtet werden.

Unter letzterer Voraussetzung in bezug auf die Lage des Transformationsmittelpunktes O' werden die Umbildungen $K_n(\overline{M}', \overline{r}')$ und $K_n(\overline{M}'', \overline{r}'')$ der Kugelräume $K_n(M', r')$ und $K_n(M'', r')$ irgend einen Kugelraum $K_n(\overline{M}, \overline{r})$ des Systems S'_{n-2} gleichartig berühren. Mittels Vergleichung der Seiten $\overline{M}'M = u$, $\overline{M}''M = v$ des Dreiecks $\overline{M}'\overline{M}\overline{M}''$ findet man dann aber sofort $u - v = \pm(\overline{r}' - \overline{r}'')$, d. h. der Ort der Mittelpunkte der Kugelräume $\overline{K}_n$ des Systems S'_{n-2} ist das Rotationsgebilde Q^2_{n-1} zweiter Ordnung $(n-3)$-ter Potenz, welches entsteht, wenn die Hyperbel mit den Brennpunkten $\overline{M}'$, $\overline{M}''$ und der reellen Achse $\overline{r}' - \overline{r}''$ im Raume R_{n-1} durch O' und R_{n-2} um m' rotiert. Und aus der Tatsache, daß irgend ein Kugelraum von S'_1 die beiden Kugelräume von S'_{n-2} berührt, deren Mittelpunkte in den Scheiteln dieser Hyperbel liegen, folgt dann umgekehrt, daß die Scheitel der Hyperbel die Brennpunkte der Ellipse sind. So ergibt sich folgender Satz:

„Die Kugelräume K_n, welche n willkürlich im R_n gegebene Kugelräume K'_n berühren, bilden 2^{n-1} einfach unendliche Reihen. Die Kugelräume irgend einer dieser Reihen sind dadurch gekennzeichnet, daß sie einen bestimmten Kugelraum $K_n^{(0)}$ senkrecht schneiden, während ihre Mittelpunkte sich auf einem bestimmten Kegelschnitte (K) befinden; Kugelraum $K_n^{(0)}$ und Kegelschnitt (K) ändern sich mit der Reihe. Jeder Reihe entspricht als Einhüllende ihrer Kugelräume ein bestimmter gebogener Raum $Z_n^{(4)}$ vierter Ordnung, die n-dimensionale Verallgemeinerung der Dupinschen Zyklide. Und beschränkt man sich auf eine einzige Reihe berührender Kugelräume K_n, so läßt das System der n berührten Kugelräume K'_n sich zu einer $(n-2)$-fach unendlichen Reihe berührter Kugelräume K'_n ausdehnen, welche hierdurch gekennzeichnet ist, daß die Kugelräume einen bestimmten Kugelraum $K_n'^{(0)}$ senkrecht schneiden, während ihre Mittelpunkte die Oberfläche eines Rotationsgebildes $Q^{(2)}_{n-1}$ zweiter Ordnung $(n-3)$-ter Potenz erfüllen, usw."

Die angewendete Transformation wird unmöglich im reellen Gebiete, falls die Potenz des Potenzpunktes O in bezug auf die gegebenen Kugelräume negativ ist. In diesem Falle kann man zunächst die Radien dieser gegebenen

Kugelräume um einen solchen konstanten Betrag verringern, daß der Radius eines dieser Kugelräume verschwindet. Dann ist die Potenz des neuen Potenzpunktes in bezug auf die neuen Kugelräume positiv, und kann somit der Beweis für dieses neue System geführt, und nachher durch die umgekehrte Operation zum ursprünglichen Falle zurückgegangen werden.

Aufgabe 101. Muß man alle Radien um den nämlichen Betrag verkleinern, oder einige verkleinern und andere vergrößern?

[Mit dieser Wahl, welche frei ist, bestimmt man die zu betrachtende Reihe.]

Gibt es auch nicht-lineare Systeme S_k, S_{n-k-1} von Kugelräumen K_n von der Eigenschaft, daß jeder Kugelraum des k-fach unendlichen Systems S_k jeden Kugelraum des $(n-k-1)$-fach unendlichen Systems S_{n-k-1} berührt?

Man beweist leicht, daß diese Frage zu bejahen ist. Geht man nämlich bei den vorhergehenden Betrachtungen von $n-k+1$ in einem R_{n-k+1} liegenden Kugelräumen K_{n-k+1} aus und beschränkt man sich wieder auf eine Reihe, so findet man zwei Systeme S_1, S_{n-k-1}, deren Mittelpunkte auf einem Kegelschnitte (K) in einer Ebene ε und einem Rotationsgebilde $Q^{(2)}_{n-k}$ zweiter Ordnung $(n-k-2)$-ter Potenz in einem R_{n-k} liegen, wo ε und R_{n-k} in ihrer Schnittlinie m halbsenkrecht aufeinander stehen. Und nun läßt sich das System S_1 unmittelbar zu einem Systeme S_k ausdehnen mittels Rotation von (K) um m in dem Raume R_{k+1}, welcher in m zu R_{n-k} das Maximum von Orthogonalität zeigt, usw.

Aufgabe 102. Wie wird dieses Resultat am einfachsten analytisch erhalten?

[Man vergleiche einen kleinen Aufsatz des Verfassers in den *Verslagen der Akademie von Amsterdam* vom Februar 1905.]

Anhang.

Gemischte Aufgaben.

Aufgabe 103. Für welchen Punkt innerhalb eines gegebenen Simplex $S(n+1)$ des R_n ist die Summe der Quadrate der normalen Abstandskoordinaten in bezug auf das Simplex als Koordinatensimplex ein Minimum?

[Sind a_i die Inhalte der begrenzenden Simplexe $S(n)$, so findet man den Punkt von Lemoine, für welchen $\frac{x_i}{a_i}$ = konstant ist, mittels der Beziehung

$$\Sigma a_i^2 \cdot \Sigma x_i^2 = (\Sigma a_i x_i)^2 - \Sigma (a_i x_k - a_k x_i)^2 .]$$

Aufgabe 104. Zeige, daß der Punkt von Lemoine des Simplex $S(n+1)$ der Schwerpunkt seines Fußpunktensimplex ist.

[Man sehe J. Neubergs „Mémoire sur le tétraèdre" (*Mémoires couronnés et autres mémoires de l'Académie de Belgique*, T. 37, 1884).]

Aufgabe 105. Ein quadratischer Rotationsraum $Q_n^{(2)}$, welcher Schwerpunkt und Punkt von Lemoine eines Simplex $S(n+1)$ zu Brennpunkten und die Verbindungslinie dieser Punkte zur Rotationsachse hat, wird sämtliche begrenzende Räume R_{n-1} des $S(n+1)$ berühren, sobald er einen dieser Grenzräume berührt. Man verlangt den Beweis.

Aufgabe 106. Zeige, daß die Summe der Quadrate der Abstände des Schwerpunktes eines Simplex $S(n+1)$ von den Eckpunkten durch Multiplikation mit $n+1$ in die Summe der Quadrate der Simplexkanten übergeht.

Aufgabe 107. Man denkt sich die Begrenzung eines willkürlichen $S(n+1)$ im R_n in seine $n+1$ Simplexe $S(n)$ zerlegt und setzt voraus, daß diese $S(n)$ nachher wieder zur Begrenzung eines $S'(n+1)$ vereinigt worden sind und zwar so, daß die Außenbegrenzung von $S(n+1)$ zur Innenbegrenzung von $S'(n+1)$ umgebildet ist. In welcher Beziehung stehen $S(n+1)$ und $S'(n+1)$ zueinander?

Aufgabe 108. Ist es — vergleiche in Nr. 25 die Ergänzung der Aufgabe 256 des ersten Teiles — leicht zu entscheiden, welcher der beiden Schnittpunkte der Kugelräume den Koinzidenzpunkt der positiv ähnlichen Systeme A_n, A'_n des R_n bildet?

[Man betrachte den Ort des Schnittraumes R_{n-2} der perspektiv verwandten Büschel homologer Räume R_{n-1}, R'_{n-1} parallel zu den Trägern der bestimmenden Simplexe $S(n)$, $S'(n)$.]

Aufgabe 109. Sind F und F' zwei positiv oder negativ ähnliche und ähnlich liegende n-dimensionale Figuren des R_n, ist k ihr Ähnlichkeitsverhältnis, V das Volum von F und deshalb $k^n V$ das Volum von F', sind weiter y und y' die Abstände der Schwerpunkte von F und F' zu einem nämlichen im R_n willkürlich gewählten Raume R_{n-1} und r und r' die Trägheitsradien dieser Figuren hinsichtlich des Raumes R_{n-1}, so ist

$$2^n (r'^2 - y^2) = r^2 - y'^2 .$$

Man verlangt den Beweis.

[Man vergleiche für den Fall $n = 3$ den Aufsatz „Sur les moments d'inertie des polygones et des polyèdres von G. Cesàro (*Mémoires de l'Académie de Belgique*, T. 54, 1900—1904.]

Aufgabe 110. Sind y, $y \pm a_1$, $y \pm a_2$, $\ldots$, $y \pm a_n$ die Lote aus dem Schwerpunkte eines Parallelotops $(Pa)_n$ und aus den Schwerpunkten der $2n$ begrenzenden Parallelotope $(Pa)_{n-1}$ auf irgend einen Raum R_{n-1} gefällt, so ist

$$\sqrt{y^2 + \tfrac{1}{3}\sum_1^n a_i^2}$$

der Trägheitsradius des $(Pa)_n$ in bezug auf diesen Raum R_{n-1}.

[Man zerlege das $(Pa)_n$ mittels n Mittelräume R_{n-1} in 2^n kongruente Teile, wende auf jeden dieser Teile in bezug

auf das ganze $(Pa)_n$ den Satz der vorhergehenden Aufgabe an, addiere die Gleichungen, usw.]

Aufgabe 111. Zeige, daß der Trägheitsradius r eines Simplex $S(n+1)$ des R_n in bezug auf einen R_{n-1} dieses R_n bestimmt wird durch die Formel

$$r^2 = \frac{1}{2(n+2)_2}\left[\sum_1^{n+1} y_k^2 + \left(\sum_1^{n+1} y_k\right)^2\right],$$

wenn $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ die Abstände der Eckpunkte vom Raume R_{n-1} angeben.

[Man vergleiche einen kleinen Aufsatz des Verfassers in den *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, T. 19, 1905, eine Note von A. Berry (*Rendiconti di Palermo*, T. 19, 1905) und eine Note von R. Mehmke (*Verslagen der Akademie von Amsterdam* vom März 1905)].

Aufgabe 112. Beweise die folgende Verallgemeinerung des Schläflischen Projektionssatzes [33]:

„Die Summe der Quadrate der Inhalte der senkrechten Projektionen eines begrenzten Teiles T irgend eines p-dimensionalen Raumes auf sämtliche $(n)_{p+q}$ Koordinatenräume R_{p+q} eines rechtwinkligen Systems des R_n ist, für $p+q<n+1$, dem $(n-p)_q$-fachen des Quadrates des Inhaltes dieses Raumteiles T gleich."

Aufgabe 113. Untersuche, inwiefern die Formel

$$I_5 = \frac{h}{18}\left[5\,(S_{\frac{1}{2}} + S_{1\frac{1}{2}}) + 4\,(S_{\frac{1}{4}} + S_{\frac{3}{4}})\right]$$

— vergleiche Nr. 44 — als Annäherung gelten kann.

Aufgabe 114. Weshalb bildet der gewöhnliche Steinverband einer Mauerfläche in Rotsteinbau, wenn die Mauer die Dicke eines halben Steins hat, kein ebenes Netz im Sinne von Nr. 51?

Aufgabe 115. Beweise, daß die zwei Tetraeder der Fig. 44 und das von den Koordinatenebenen und der uneigentlichen Ebene gebildete Tetraeder ein „desmisches" System bilden, d. h. daß die drei Quadrupel der Seitenflächen dieser Tetraeder zu je zweien die nämlichen sechzehn Schnittlinien und die drei Quadrupel der Eckpunkte zu je zweien die nämlichen sechzehn Verbindungslinien liefern.

Aufgabe 116. Bei welchen der fünf regulären Polyeder (der sechs regulären vierdimensionalen Polytope) ist es möglich, ein rechtwinkliges Koordinatensystem zu finden, dessen Achsen Hauptstrahlen der drei (vier) verschiedenen Gattungen sind?

Aufgabe 117. Beweise [60k], daß einer Drehung der Umkugel eine allgemeine lineare Transformation $\xi = \frac{a x + b}{c x + d}$ der Ebene entspricht und diese letztere die komplexe Ausbreitung der linearen Transformation auf die Gerade bildet.

Aufgabe 118. Welcher quadratische Cylinderraum [100] wird durch die Gleichung

$$p(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-2}^2) + q x_{n-1} = 0$$

dargestellt?

Aufgabe 119. Nennt man mit Herrn G. Fontené (*Nouv. Ann. de Math.*, Oct. 1904) ein Polyeder (e, k, f) ein homogenes Polyeder vom Geschlechte eins, wenn die Zahlen e, k, f den Gleichungen

$$e + f = k, \quad ex = fy = 2k$$

befriedigen, so gibt es drei Gruppen dieser dem Eulerschen Satze nicht unterworfenen Polyeder, welche durch die Symbole $(\mu, 2\mu, \mu)$, $(2\mu, 3\mu, \mu)$, $(\mu, 3\mu, 2\mu)$ angedeutet werden können. Von der ersten Gruppe liefert das durchbohrte Polyeder (9, 18, 9) der Nummer 16^b das einfachste Beispiel. Sind ABC, DEF, GHI gleichseitige Dreiecke in ähnlicher Lage, dessen Mittelpunkte sich auf einem gemeinschaftlichen Lote ihrer Ebenen befinden, und ist die mittlere dieser Ebenen von den beiden anderen gleichweit entfernt und Symmetrieebene des Polyeders, so gibt es zwei konzentrische Rotationsflächen zweiten Grades mit gemeinschaftlicher Rotationsachse l, deren eine die neun Eckpunkte des Polyeders enthält, während die andere die neun Seitenflächen des Polyeders berührt. Es stehen dann — wie sich aus den bekannten Schließungsproblemen bei Kegelschnitten ergibt — die beiden Rotationsflächen so miteinander in Verbindung, daß es eine zweifach unendliche Anzahl von Polyedern (9, 18, 9) gibt, welche zu gleicher Zeit der einen Fläche um- und der andern einbeschrieben sind. Und die

Verallgemeinerung dieses Satzes auf den Fall, daß die gleichseitigen Dreiecke durch reguläre Polygone in ähnlicher Lage ersetzt sind, liegt ganz auf der Hand. Zu zeigen, daß zwischen den Halbachsen dieser Flächen die Beziehung

$$a_2 b_2 = (a_1 - a_2) b_1 \cos\frac{\pi}{m}$$

besteht, wo (a_1, b_1) der umgeschriebenen, (a_2, b_2) der eingeschriebenen Fläche angehören, (a_1, a_2) auf l fallen und n die Seitenzahl der regulären Polygone ist.

Aufgabe 120. Wie kann die vorhergehende Aufgabe auf den n-dimensionalen Raum ausgedehnt werden?

Aufgabe 121. Ist im R_n ein Raum R_{n-1} und außerhalb dieses Raumes ein Punkt P gegeben, und betrachtet man, in der Weise der zentralen Projektion, P als Zentrum und R_{n-1} als „Tafelraum", so werden die Fluchtpunkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ der Achsen $OX_1, OX_2, \ldots, OX_n$ irgend eines rechtwinkligen Systems ein Polsimplex $S(n)$ bilden in bezug auf den Kugelraum $K_{n-1}(P_1, PP_1\sqrt{-1})$, welcher die Projektion P_1 von P auf R_{n-1} zum Mittelpunkt und $PP_1\sqrt{-1}$ zum Radius hat. Deshalb ist P_1 der Höhepunkt dieses $S(n)$.

[Man vergleiche für $n = 4$ die Arbeit: „Die Lehre von der Zentralprojektion im vierdimensionalen Raume" von Dr. H. de Vries aus Delft (Leipzig, Göschensche Verlagshandlung, 1905).]

Aufgabe 122. In seiner Dissertation: „Over de restdoorsnede, usw." (Amsterdam, Delsman & Nolthenius, 1901) hat Herr H. de Vries mittels stereometrischer Betrachtungen gezeigt, wie eine algebraische ebene Kurve organisch verknüpft ist mit ihren Polkurven und den diesen Polkurven zugeordneten Satellitkurven. Und ebenso muß, wie er behauptet, mittels Betrachtungen der vierdimensionalen Geometrie eine organische Verbindung zwischen einer algebraischen Fläche, ihren Polflächen und den diesen zugeordneten Satellitflächen aufgedeckt werden können. Man versuche diesen Gedanken näher zu erörtern.

Aufgabe 123. In der Ebene wird ein Kreis ringsum genau von sechs Kreisen der gleichen Größe berührt, falls

letztere Kreise einander nicht teilweise bedecken dürfen. Man suche für das analoge Problem im R_n eine obere Grenze für die entsprechende Zahl anzugeben.

[Legt man aus dem Mittelpunkte des Kugelraumes $K_n^{(1)}$ Tangenten an einen ihn berührenden Kugelraum $K_n^{(2)}$ gleicher Größe, so schließen diese einen Teil der Oberfläche des $K_n^{(1)}$ ein, welcher sich in der ganzen Oberfläche als Einheit durch

$$\frac{n-1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{3}\pi}\sin^{n-2}\varphi\,d\varphi$$

ausdrückt. Also findet man folgende obere Grenze G[1])

$n=2$	$G=6$	$n=5$	$G=51{,}6827$
3	13,2363	6	102,6449
4	26,0887	7	204,2390

Für $n=2$ wird die obere Grenze wirklich erreicht. Für $n=3$ ist 12 die Maximalzahl der nicht aneinander schließenden berührenden Kugeln, deren Mittelpunkte z. B. die Eckpunkte eines Ikosaeders (oder einer Gleichgewichtsfigur von Hexaeder und Oktaeder) bilden können. Für $n=4$ bilden die Eckpunkte eines Vierundzwanzigzelles mit der Kantenlänge 2ϱ die Mittelpunkte der 24 angeschlossenen Kugelräume K_4 mit dem Radius ϱ, welche einen mit dem Zelle konzentrischen Kugelraume K_4 gleicher Größe berühren.]

---

[1]) Meinem hiesigen Kollegen Prof. Dr. F. de Boer verdanke ich die Beziehung

$$\lim_{n=\infty}\left(n\,2^n\int_0^{\frac{1}{3}\pi}\sin^n\varphi\,d\varphi\right)=\tfrac{1}{3}\sqrt{3}\,.$$

Also hat man auch

$$\lim_{n=\infty}\frac{G_n}{2^{n-1}}=\sqrt{3\pi}\,.$$

[Wie Prof. Dr. J. C. Kluyver mir später mitteilte, gilt allgemeiner die Beziehung

$$\lim_{n=\infty}\left(n\frac{1}{\sin^n\alpha}\int_0^{\alpha}\sin^n\varphi\,d\varphi\right)=\operatorname{tang}\alpha\,.]$$

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

Prof. Dr. Hermann Schubert:

Sammlung von arithmetischen und algebraischen Fragen und Aufgaben, verbunden mit einem systematischen Aufbau der Begriffe, Formeln und Lehrsätze der Arithmetik, für höhere Schulen.

Erstes Heft: Für mittlere Klassen. 4. Aufl. Brosch. M. 1.80, geb. M. 2.25.

Zweites Heft: Für obere Klassen. 3. Aufl. Brosch. M. 1.80, geb. M. 2.25.

Ausgewählte Resultate zu beiden Heften. 2. Aufl. Kart. M. 1.—.

Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra für Real- und Bürgerschulen. Ein Auszug aus der Sammlung von arithmetischen und algebraischen Fragen und Aufgaben.
Erstes Heft. 2. Aufl. Brosch. M. 1.—, kart. M. 1.20.
Zweites Heft. Brosch. M. 1.—, kart. M. 1.20.
Erstes Heft **mit Resultaten.** 2. Aufl., kart. M. 1.70.
Ausgewählte Resultate zu Heft 1, brosch. M. —.50.

System der Arithmetik und Algebra als Leitfaden für den Unterricht in höheren Schulen. Brosch. M. 1.80, geb. M. 2.—.

Die „Sammlung von arithmetischen und algebraischen Fragen und Aufgaben, verbunden mit einem systematischen Aufbau der Begriffe, Formeln und Sätze der Arithmetik" eignet sich hauptsächlich für **Gymnasien,** das erste und zweite Heft der „Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra für Realschulen" ist für **Realschulen** bestimmt. Letztgenanntes Werk enthält keinerlei theoretische Begründungen, sondern lediglich **Aufgaben,** natürlich angepaßt an den Lehrgang des Verfassers, aber doch, ihrem Inhalt nach, mehr für Realschüler als für Gymnasiasten geeignet.

CABOT SCIENCE LIBRARY
CANCELLED
CABOT
DEC 1 2 2002
BOOK DUE

übrigens nicht mit der Schilderung der Spiele und der Erfindung ihrer Geheimnisse, sondern erteilt zugleich sehr anziehende kulturgeschichtliche Aufschlüsse.

Der Name des Verfassers bürgt für einen gediegenen Inhalt, und somit dürften die Bücher nicht nur dem Mathematiker von Fach, sondern jedem, der sich nur einigermaßen für diese Wissenschaft interessiert, ja überhaupt jedem denkenden, gebildeten Laien manche genußreiche Stunde schaffen.

3 2044 070 872 007

G. J. Göschen'sche Verlag

Elementare Berechnung der Logarithmen,

eine Ergänzung der Arithmetik-Bücher

Dr.
Professor an der G
Pr

This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

MAY 12 1969 ILL
24/6761

Formeln und

in systematischer

Professor an de
Mi
Pr

Elemente d

Für den

D
Professor am Real

Pre

Die Lehre v

im vier

D
Dozent an de

Prei

3 2044 070 872 007